OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

UNA - UCR - TEC - UNED - MEP - MICIT

Geometría

I Nivel
I Eliminatoria

Marzo 2016

Índice

1. Presentación.

El presente material pretende ser una guía para el estudiante que participa por primera vez en la Olimpiada Costarricense de Matemática en el I Nivel, que corresponde únicamente a estudiantes de sétimo año de colegio. Con él se busca que el estudiante conozca el tipo de problemas a los que se va a enfrentar en la I Eliminatoria de esta olimpiada.

En la siguiente sección se presenta el temario completo de geometría, para tener una visión global de los contenidos que debe manejar para resolver los ejercicios de esta eliminatoria en el Nivel I. Posteriormente se desglosan estos temas y se hace un resumen de los conceptos matemáticos más relevantes del temario; además se ofrece una serie de ejercicios, tomados de las primeras eliminatorias de años anteriores, de modo que se observe cómo se aplican dichos conceptos a problemas concretos.

Finalmente se presenta una lista de ejercicios adicionales para que pueda poner en práctica los conceptos estudiados. Se incluyen las soliciones de estos ejercicios, pero se recomienda tratar de resolverlos antes de consultar la solución.

2. Temario

Los siguientes son los temas sobre los que se elaborarán las preguntas de la Primera Eliminatoria.

- Conceptos geométricos básicos y su notación: punto, recta, plano. Puntos colineales y no colineales. Puntos coplanares y puntos no coplanares. Segmentos de recta, semirrectas, rayos, y semiplanos. Rectas paralelas, perpendiculares, concurrentes. Planos paralelos y perpendiculares. Figuras tridimensionales (caras, aristas y vértices).

- Clasificación de ángulos por su medida. Clasificación de ángulos por su posición (adyacentes y consecutivos). Relaciones de medida entre los ángulos (congruentes, complementarios y suplementarios). Ángulos determinados por dos rectas y una transversal: alternos externos, alternos internos, correspondientes, conjugados.

- Desigualdad triangular. Teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo y de un cuadrlátero convexo. Teorema de la medida del ángulo externo de un triángulo. Teorema de la suma de los ángulos externos de un triángulo y de un cuadrlátero convexo. Clasificación de triángulos de acuerdo con la medida de sus ángulos internos o a la medida de sus lados.

- Área y perímetro de triángulos, cuadriláteros y círculo.

3. Conceptos geométricos básicos y su notación

Este apartado del temario corresponde principalmente a conceptos previos y de notación. Los términos punto, recta y plano se consideran conceptos primitivos, que no requieren de definición. Se acostumbra denotar los puntos con letras mayúsculas $(A, B, P, Q, \ldots)$, a las rectas con letras minúsculas y también suele usarse subíndices (l_1, l_2), en cuanto a los planos puede utilizarse letras mayúsculas o letras griegas.

Otros de los conceptos que debe manejar en esta parte son los de puntos colineales y no colineales, como aquellos que pertenecen a una misma recta, y los que no pertenecen, respectivamente. De igual manera se tienen los puntos coplanares y puntos no coplanares, como aquellos que están contenidos en un mismo plano y los que no. Además debe manejar los conceptos de segmentos de recta, semirrectas, rayos, y semiplanos, rectas paralelas, perpendiculares, concurrentes (dos o más rectas que concurren en un punto).

Algunas de las notaciones más utilizadas son las siguientes:

$\overline{AB}$: Segmento que va de A a B
$\overrightarrow{AB}$: Rayo que empieza en A y pasa por B
$\overleftrightarrow{AB}$: Recta que pasa por A y B
$A - B - C$: Puntos colineales A, B y C
$l \| m$: La recta l es paralela a la recta m
$l \perp m$: La recta l es perpendicular a la recta m

Veamos algunas de las preguntas que se han presentado en eliminatorias anteriores sobre estas temáticas.

Ejemplo 1. (Pregunta N° 30, I Eliminatoria 2013, I Nivel)

Considere tres puntos colineales A, B y C y dos puntos D, E tales que $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BE}$ son perpendiculares a $\overleftrightarrow{AB}$. Analice las siguientes proposiciones:

I Si B está entre A y C, entonces $\overline{CD}$ interseca a $\overline{AB}$

II Si C está entre A y B, entonces $\overline{CE}$ interseca a $\overline{DB}$

De ellas, son siempre verdaderas

(a) Solamente II

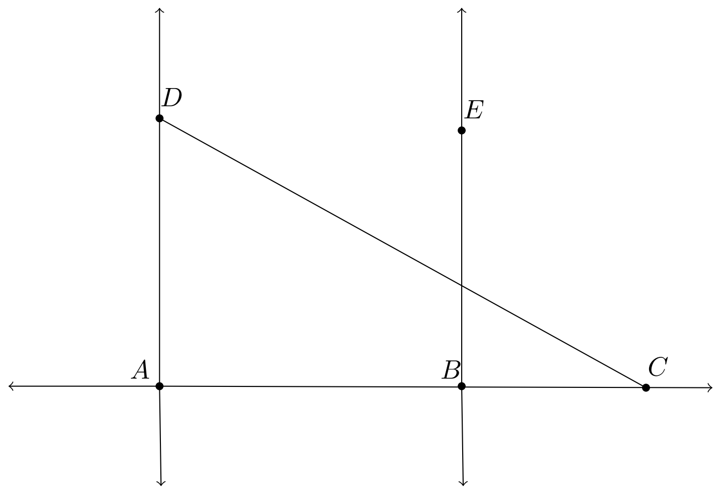
(b) Solamente I

(c) Ninguna

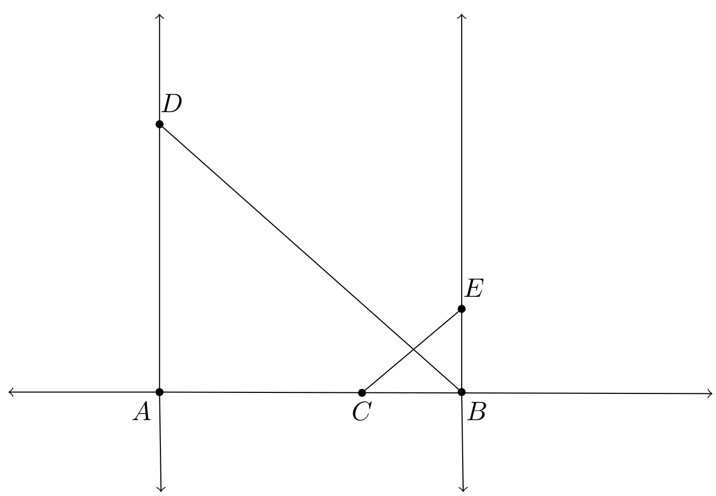
(d) Ambas

Solución

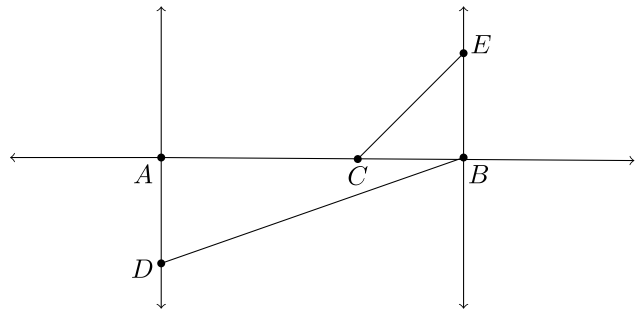
Observe que la proposición I nunca es verdadera sin importar en qué semiplano se encuentre D con respecto a $\overleftrightarrow{AB}$, ya que los puntos A, D, C forman un triángulo y el segmento $\overline{AB}$ es parte del lado $\overline{AC}$ (el punto E no se menciona en esta proposición)



Por su parte, la proposición II es verdadera en caso de que D y E estén en el mismo semiplano con respecto a $\overleftrightarrow{AB}$, como en la siguiente figura:



Sin embargo **no puede asegurarse que esto ocurra siempre**, pues si D y E están en distintos semiplanos con respecto a $\overleftrightarrow{AB}$, entonces los segmentos no se intersecan, tal como se muestra en la siguiente figura:



Comentario: Es importante notar que en este ejercicio se debe manejar bien la notación, para interpretar adecuadamente el enunciado, así como el concepto de perpendicularidad. Además se deben considerar todos los casos posibles para comprobar si la proposición es verdadera siempre o solamente en algunos casos.

Ejemplo 2. (Pregunta $N°$ 21, I Eliminatoria 2013, I Nivel)

Si $\square ABCD$, $\square ABFG$, $\square GFEH$ son caras de un cubo, entonces un punto que está en el mismo plano que B, F y D corresponde a

(a) C

(b) E

(c) G

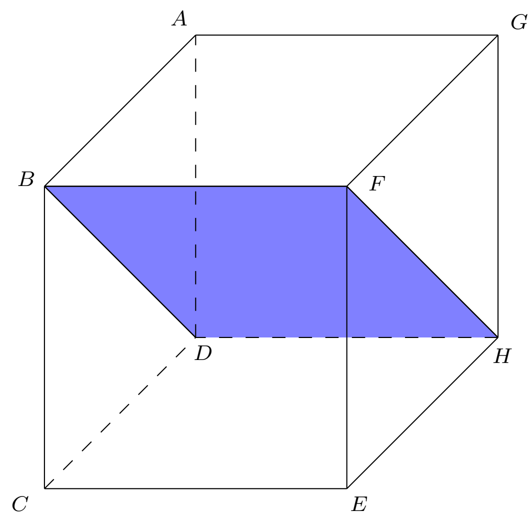
(d) H

Solución

Se debe notar que un cubo tiene seis caras, las cuales son cuadrados, y ocho vértices denotados con letras mayúsculas. En el enunciado se mencionan tres de estos cuadrados y también se mencionan las ocho letras que corresponden a los vértices.

Es importante recordar que en la notación de un cuadrilátero (o de un polígono en general) las letras que corresponden a los vértices **se dan en orden**, es decir, en $\square ABCD$ los lados del cuadrado son $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$, y en $\square ABFG$ los lados son $\overline{AB}$, $\overline{BF}$, $\overline{FG}$ y $\overline{GA}$. Entonces, de los vértices mencionados solamente faltan E y H, y como se menciona el cuadrilátero $\square GFEH$, sus lados son $\overline{GF}$, $\overline{FE}$, $\overline{EH}$ y $\overline{HG}$

Supongamos que $\square ABCD$ es la cara izquierda del cubo, como el cuadrado $\square ABFG$ repite dos letras, este cuadrado debe compartir una arista del cubo con $\square ABCD$, supongamos que es la cara superior. Entonces $\square GFEH$ debe ser la cara derecha, tal como se muestra en la figura.



Vemos entonces que B, F y D están en el mismo plano que H.

Comentario: Además del concepto de puntos coplanares, de nuevo se observa la importancia de manejar la notación para una adecuada colocación de los datos del enunciado en la figura.

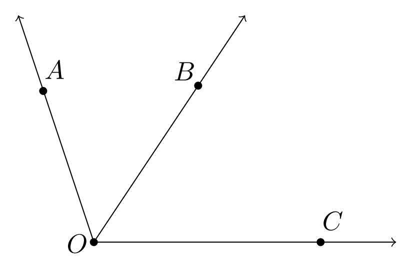
4. Ángulos

4.1. Clasificación de acuerdo a su medida

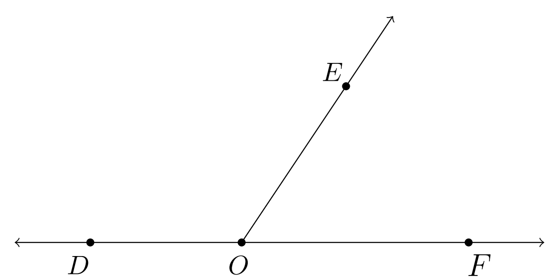
Recordemos que los ángulos se pueden clasificar de acuerdo a su medida en agudos (más de $0°$ y menos de $90°$), rectos (exactamente $90°$) y obtusos (más de $90°$ y menos de $180°$). Si las medidas de dos ángulos suman $90°$ se dice que ellos son complementarios, y si las medidas de dos ángulos suman $180°$ entonces se llaman suplementarios. Si dos ángulos tienen la misma medida se dice que son congruentes (se usa la notación $\cong$).

4.2. Clasificación de acuerdo a su posición

Los ángulos también se pueden clasificar por su posición. Se dice que dos ángulos son consecutivos si tienen el vértice y un lado en común. Si además son suplementarios entonces se dice que son adyacentes. Los ángulos adyacentes también se dice que forman un par lineal.



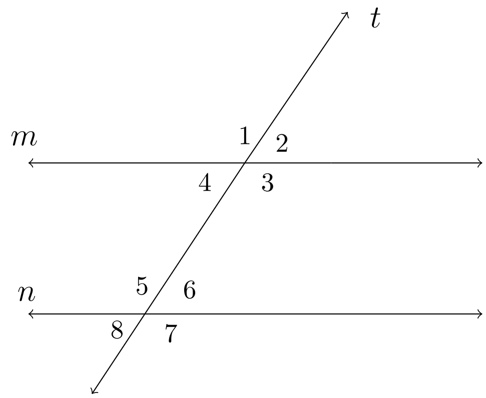
$\angle AOB$ y $\angle BOC$ son consecutivos



$\angle DOE$ y $\angle EOF$ son adyacentes o forman un par lineal

4.3. Ángulos entre dos rectas y una transversal.

Por otra parte, si se tienen dos rectas paralelas y una recta transversal se forman ocho ángulos, como se observa en la figura siguiente (por comodidad en la notación se utilizarán números para identificar a los ángulos).



Los ángulos $\angle 3$ y $\angle 5$ son alternos internos, al igual que $\angle 4$ y $\angle 6$. Observe que están en lados opuestos de la transversal pero entre las dos paralelas. En cada pareja de ángulos alternos internos, los ángulos son congruentes entre sí.

Los ángulos $\angle 1$ y $\angle 7$ son alternos externos, al igual que $\angle 2$ y $\angle 8$. Estos están en lados opuestos de la transversal pero externos a las paralelas. En cada pareja de ángulos alternos externos, los ángulos son congruentes entre sí.

Las parejas de ángulos $\angle 1$ y $\angle 5$, $\angle 2$ y $\angle 6$, $\angle 3$ y $\angle 7$, $\angle 4$ y $\angle 8$ se llaman correspondientes. Estos están del mismo lado de la transversal, no adyacentes, uno interno y otro externo. En cada pareja de ángulos correspondientes, los ángulos son congruentes entre sí.

Las parejas de ángulos $\angle 1$ y $\angle 8$, $\angle 2$ y $\angle 7$, $\angle 3$ y $\angle 6$, $\angle 4$ y $\angle 5$ se llaman conjugados. Estos están del mismo lado de la transversal, no adyacentes, ambos internos o ambos externos. En cada pareja de ángulos conjugados, los ángulos son suplementarios.

Observemos dos preguntas donde se aplican los conceptos anteriores.

Ejemplo 3. (Pregunta N° 25, I Eliminatoria 2014, I Nivel)

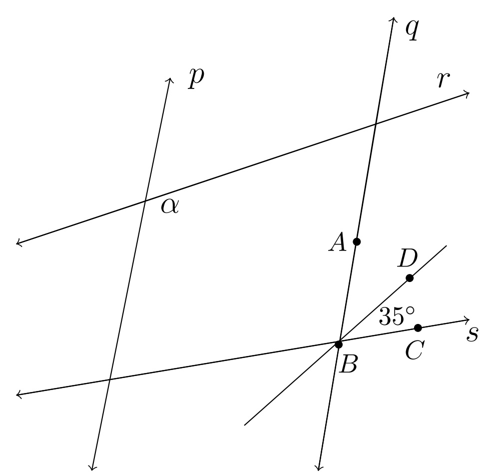
Si $p \| q$, $r \| s$ y $\overleftrightarrow{BD}$ es una bisectriz del $\angle ABC$ entonces la medida del ángulo α es

(a) 35°

(b) 70°

(c) 110°

(d) 145°

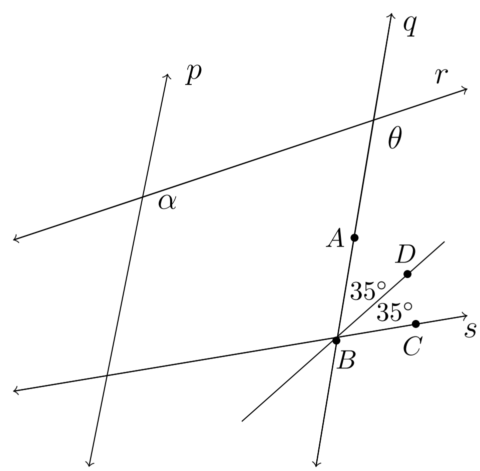


Solución

Debido a que $\overleftrightarrow{BD}$ es bisectriz del $\angle ABC$ (lo divide en dos ángulos congruentes), entonces $\angle ABD$ también mide 35° (igual que el $\angle DBC$ indicado en la figura del enunciado). Esto quiere decir que el ángulo completo $\angle ABC$ mide 70°.

Por otra parte observe que los ángulos $\angle ABC$ y $\angle\theta$ son conjugados (considerando las paralelas r y s, y a la recta q como transversal), por lo que son suplementarios (suman 180°), de donde se obtiene que $m\angle\theta = 110°$

Finalmente, $\angle\theta$ y $\angle\alpha$ son correspondientes (considerando las paralelas p y q, y a la recta r como transversal), por lo que son congruentes ($\angle\alpha \cong \angle\theta$), es decir tienen la misma medida. Por lo tanto $m\angle\alpha = 110°$



Comentario: Observe que, como hay dos parejas de rectas paralelas, los ángulos que se forman entre ellas se pueden clasificar desde distintos puntos de vista, ya sea considerando las paralelas r y s ó a las rectas p y q. también es importante observar las diferentes notaciones para los ángulos: utilizando tres puntos ($\angle ABC$, siempre colocando el vértice en el centro), usando letras griegas ($\angle\theta$, $\angle\alpha$) o utilizando números como se hizo en la explicación previa al ejemplo.

Ejemplo 4. (Pregunta $N°$ 10, I Eliminatoria 2014, I Nivel)

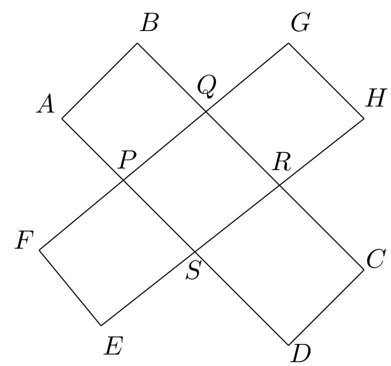
En la figura adjunta $\square ABCD$ y $\square EFGH$ son rectángulos. Se puede asegurar que $m\angle APF + m\angle BRH$ es

(a) 150°

(b) 180°

(c) 210°

(d) 225°



Solución

Como $\square EFGH$ es un rectángulo, entonces $\overline{FG}$ y $\overline{EH}$ son paralelos y $\overline{AD}$ es una transversal a ellas, por lo que $\angle APF$ y $\angle ASE$ son correspondientes entre paralelas, es decir $\angle APF \cong \angle ASE (\divideontimes)$

Por la misma razón se puede afirmar que $\angle BRE \cong \angle ASE (\divideontimes\divideontimes)$, considerando ahora los segmentos paralelos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, y el segmento transversal $\overline{EH}$.

Además $\angle BRE$ y $\angle BRH$ son adyacentes, por lo que son suplementarios, es decir, $m\angle BRE + \angle BRH = 180° (\divideontimes \divideontimes \divideontimes)$

Finalmente, por $(\divideontimes)$ y $(\divideontimes\divideontimes)$ se tiene que $\angle APF \cong \angle BRE$, por lo que ellos tienen la misma medida, entonces en $(\divideontimes \divideontimes \divideontimes)$ se puede sustituir $\angle BRE$ por $\angle APF$ y se concluye que $m\angle APF + \angle BRH = 180°$

Comentario: Observe nuevamente la forma en que se analizan los ángulos entre las paralelas, pero considerando las paralelas adecuadas. En este caso al tener dos rectángulos hay muchos pares de lados paralelos, por lo que se debe tener cuidado al manejar toda la información disponible.

Ejemplo 5. (Pregunta N° 9, I Eliminatoria 2015, I Nivel)

En un cuadrado $ABCD$, E y F son los puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, respectivamente. Una proposición verdadera es

(a) $m\angle BAE + m\angle EAF = m\angle BEF$

(b) $\angle BAF \cong \angle AFD$

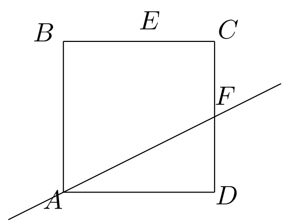
(c) $m\angle EFC > m\angle AFD$

(d) $\angle EAF \cong \angle AEB$

Solución

- Observe que $m\angle BAE + m\angle EAF = m\angle BAF < m\angle BAD = 90^\circ$, mientras que $m\angle BEF > 90^\circ$. Por tanto la opción a) es falsa.
- $\overleftrightarrow{AB} \| \overleftrightarrow{DC}$ y $\overleftrightarrow{AF}$ es transversal a ellas, por lo que $\angle BAF$ y $\angle AFD$ son alternos internos y son congruentes. Por tanto la opción b) es verdadera.
- Observe que $\triangle EFC$ es rectángulo isósceles, por lo que $m\angle EFC = 45^\circ$, mientras que $\triangle ADF$ es rectángulo escaleno, y como $AD > DF$ se tiene que $m\angle AFD > m\angle DAF$, es decir, $m\angle AFD > 45^\circ$. Por tanto la opción c) es falsa.
- Finalmente observe que $+\angle EAD \cong \angle AEB$ por ser anternos internos entre paralelas y $m\angle EAD = m\angle EAF + m\angle FAD = m\angle EAF + m\angle EAB$, pues $\angle EAB \cong \angle FAD$. Por lo tanto, $\angle EAD > \angle EAF$, es decir, $\angle AEB > \angle EAF$. Por tanto la opción d) es falsa.

  La única proposición verdadera es la opción b.



En muchas ocasiones los conceptos sobre ángulos no se aplican en forma exclusiva. Por lo general se presentan preguntas en las que, para su solución, se deben aplicar estos conceptos junto con los de triángulos o cuadriláteros. En el Ejemplo 4 vimos cómo se utiliza la propiedad de que los lados opuestos de un rectángulo son paralelos, para luego analizar los ángulos entre ellos; en el Ejemplo 5 también se observa, en el análisis de la opción c), la necesidad de conocer algunas características básicas de los triángulos isósceles.

En la sección siguiente, donde profundizamos en los triángulos y sus características, veremos que se seguirán utilizando los conceptos de ángulos presentados hasta el momento.

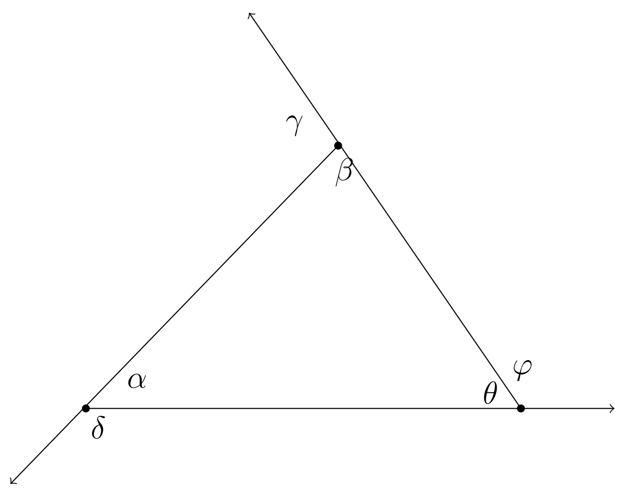
5. Triángulos

A continuación expondremos las principales características de los triángulos que debe dominar para la primera eliminatoria.

5.1. Ángulos internos y externos.

Una de las principales características que cumple todo triángulo, con respecto a sus ángulos, es que la **suma de las medidas de los ángulos internos siempre es** $180°$. Por otra parte, la suma de las medidas de los ángulos externos siempre es $360°$. Además, la medida de un ángulo externo siempre es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no adyacentes a dicho ángulo externo, a este último resultado se le conoce como Teorema de la medida del ángulo externo.

Veamos estas propiedades en la siguiente figura:



Suma de ángulos internos: $m\angle\alpha + m\angle\beta + m\angle\theta = 180°$

Suma de ángulos externos: $m\angle\delta + m\angle\varphi + m\angle\gamma = 180°$

Medida de un ángulo externo: $m\angle\varphi = m\angle\alpha + m\angle\beta$

Recuerde que el ángulo externo se forma con un lado del triángulo y la prolongación del otro lado.

Ejemplo 6. (Pregunta $N°$ 22, I Eliminatoria 2013, I Nivel)

En la figura, el $\square CDHG$ es a un paralelogramo. Además la $m\angle DHF = 120°$ y $m\angle CDI = 30°$.

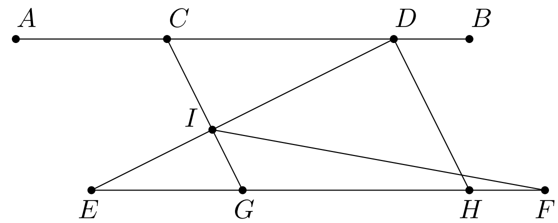
Entonces con certeza se cumple:

(a) el $\triangle IEF$ es acutángulo

(b) el $\triangle IEF$ es rectángulo

(c) $m\angle DCG = 60°$

(d) $m\angle DIG = 120°$

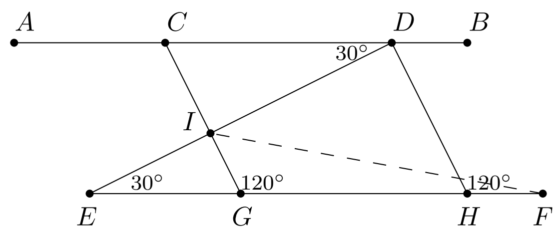


Solución

Vamos a obtener información sobre $\triangle IEF$, para lo cual necesitamos información sobre sus ángulos internos.

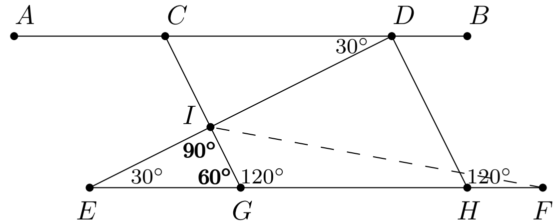
Como $\square CDHG$ es un paralelogramo, los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$ son paralelos, entonces los ángulos $\angle CDI$ y $\angle GEI$ son congruentes por ser alternos internos entre paralelas, es decir, $m\angle GEI = 30°$

De igual forma los segmentos $\overline{CG}$ y $\overline{DH}$ son paralelos, entonces los ángulos $\angle DHF$ y $\angle IGH$ son congruentes por ser correspondientes, entonces $m\angle IGH = 120°$



Por otra parte, $\angle EGI$ y $\angle IGH$ son suplementarios, por lo que $m\angle EGI + m\angle IGH = 180°$ y como $m\angle CGH = 120°$ entonces se tiene que $m\angle EGI = 60°$

Ahora, $m\angle EGI + m\angle GEI + m\angle EIG = 180°$ pues son los ángulos internos de un triángulo, y como ya sabemos que $m\angle EGI = 60°$ y $m\angle GEI = 30°$ entonces $m\angle EIG = 90°$



Además $m\angle EIF = m\angle EIG + m\angle GIF$ y como acabamos de encontrar que $m\angle EIG = 90°$ entonces $m\angle EIF > 90°$. Por lo tanto, $\triangle IEF$ es obtusángulo, con lo cual se concluye que las proposiciones a) y b) son falsas.

Por otra parte, $m\angle EIG = m\angle CID$ por ser opuestos por el vértice. Entonces en $\triangle CDI$ tenemos que $m\angle CID = 90°$ y $m\angle CDI = 30°$, por lo tanto $m\angle DCI = 60°$ pues la suma de los ángulos internos del triángulo es 180°. Observe finalmente que $\angle DCI$ es el mismo $\angle DCG$, por lo que la respuesta correcta es la opción C.

Comentario: Observe que se están utilizando una gran cantidad de conceptos sobre ángulos, como adyacentes, opuestos por el vértice, correspondientes, alternos internos, por lo que se requiere un manejo adecuado de estas clasificaciones de ángulos.
Observe también que la opción D es falsa, pues $\angle DIG$ y $\angle EIG$ son adyacentes (y por lo tanto suplementarios) y como $m\angle EIG = 90°$ entonces $\angle DIG$ también debe medir 90°

5.2. Desigualdad triangular.

Otra de las propiedades, que se refiere a las medidas de los lados, es la Desigualdad Triangular. Esta establece que **la suma de las longitudes de dos lados de un triángulo siempre es más grande que la longitud del tercer lado**. Así por ejemplo, no se puede construir un triángulo cuyos lados midan 6cm, 8cm y 15cm pues $6 + 8 < 15$.

También se puede enunciar diciendo que la **suma de las longitudes de los dos lados más pequeños siempre es mayor que la longitud del lado mayor.**

Observe el siguiente ejemplo, donde se aplica este concepto:

Ejemplo 7. (Pregunta $N°$ 11, I Eliminatoria 2014, I Nivel)

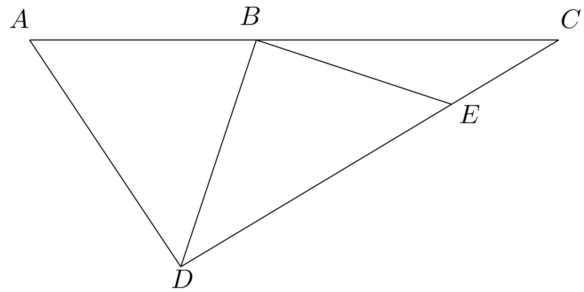
En la figura adjunta, si $AB = 4$, $AD = 5$, $DE = 6$, $EC = 2$, $BE = 4$ y $BD = BC$. ¿Cuántos números enteros corresponden a las medidas de $\overline{BD}$?

(a) 1

(b) 2

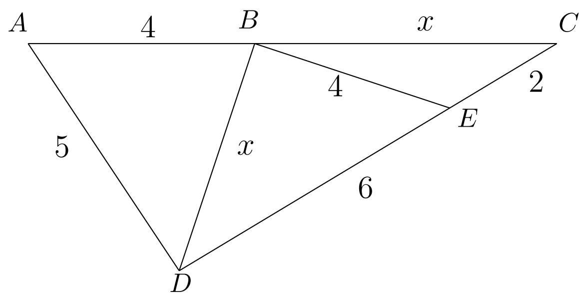
(c) 3

(d) 4



Solución

Llamemos x a la medida de $\overline{BD}$ y coloquemos los datos del enunciado en la siguiente figura



Por la Desigualdad Triangular podemos afirmar lo siguiente:

En el $\triangle ABD$ se tiene que $x+4>5$ y $4+5>x$, es decir, $x>1$ y $9>x$, lo cual se puede resumir en una sola expresión $1<x<9$ (1)

En el $\triangle DBE$ $x+4>6$ y $4+6>x$, es decir, $x>2$ y $10>x$, de donde $2<x<10$ (2)

En el $\triangle BEC$ $x+2>4$ y $4+2>x$, es decir, $x>2$ y $6>x$, de donde $2<x<6$ (3)

En el $\triangle ADC$ y $8+5>4+x$, $5+4+x>8$ es decir, $9>x$ y $x>0$, de donde $0<x<9$ (4)

En el $\triangle BDC$ y $2x>8$, de donde $x>4$ (5)

Como x debe cumplir todas las desigualdades (1), (2), (3), (4), (5) se tiene que $4<x<6$, y como además debe ser un número entero, entonces solamente podría tomar el valor 5. Es decir, existe un solo número entero que puede corresponder a la medida de $\overline{BD}$.

5.3. Relación de orden entre lados y ángulos.

Una propiedad que relaciona las medidas de los lados y los ángulos establece que **si un lado de un triángulo es mayor que otro, el ángulo opuesto al primer lado es mayor que el ángulo opuesto al segundo.** Y también se puede deducir de esto que, si dos lados del triángulo tienen igual medida, entonces los ángulos opuestos a estos lados también son congruentes.

Ejemplo 8. (Pregunta N°28, I Eliminatoria 2013, I Nivel)

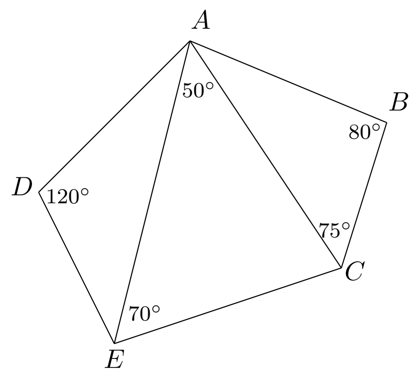
De acuerdo con la información que se proporciona en la siguiente figura, el segmento de mayor longitud es

(a) $\overline{AE}$

(b) $\overline{AD}$

(c) $\overline{AB}$

(d) $\overline{AC}$



Solución

Para el triángulo obtusángulo $\triangle ADE$ se tiene que el segmento de mayor longitud es $\overline{AE}$, pues es el que se opone al ángulo mayor (los otros dos ángulos son agudos y por lo tanto de menor medida que el obtuso).

Por otra parte, en el $\triangle AEC$ observe que $m\angle ACE = 60°$, pues los otros dos ángulos internos miden 50° y 70° y la suma de los tres debe ser 180°. Entonces, en este triángulo el segmento de mayor longitud es $\overline{AC}$, pues se opone al ángulo mayor.

Lo mismo se puede afirmar en el $\triangle ABC$, pues se puede obtener que $m\angle BAC = 25°$, por lo que $\overline{AC}$ se opone al ángulo mayor de este triángulo.

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción D.

5.4. Clasificación de triángulos.

Los triángulos se pueden clasificar de acuerdo a las medidas de sus lados en equilátero (tiene los tres lados de igual medida), isósceles (tiene dos lados de igual medida) y escaleno (tiene los tres lados de diferente medida).

También se pueden clasificar de acuerdo a la medida de sus ángulos internos en acutángulo (sus tres ángulos internos son agudos), rectángulo (uno de sus ángulos internos es recto) y obtusángulo (uno de sus ángulos internos es obtuso)

Veamos dos preguntas donde se aplican estos conceptos.

Ejemplo 9. (Pregunta $N°18$, I Eliminatoria 2008, Nivel A)

Si los ángulos α, β, γ de un triángulo cumplen que $\gamma = \alpha + \beta$ entonces el triángulo es

(a) Rectángulo

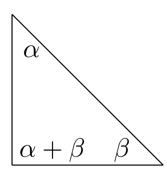
(b) Acutángulo

(c) Obtusángulo

(d) Isósceles

Solución

Como α, β, γ son los ángulos de un triángulo entonces $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, pero como $\gamma = \alpha + \beta$ entonces se tiene que $\gamma + \gamma = 180°$ de donde $\gamma = 90°$. Por lo tanto el triángulo es rectángulo.



Ejemplo 10. (Pregunta $N°11$, I Eliminatoria 2012, Nivel A)

Considere un triángulo isósceles, tal que dos de sus ángulos internos están en relación $1 : 4$, entonces se puede asegurar que dicho triángulo podría ser

(a) solamente acutángulo

(b) solamente rectángulo

(c) solamente obtusángulo

(d) obtusángulo o acutángulo

Solución

Como se indica que el triángulo es isósceles, tiene dos ángulos de igual medida. Además debe considerarse que dos de sus ángulos internos están en relación $1:4$, es decir, que si uno tiene medida α el otro mide 4α.

Se tiene dos opciones:

I Los dos ángulos congruentes midan α, en cuyo caso las medidas de los tres ángulos serán α, α, 4α

II Los dos ángulos congruentes midan 4α, en cuyo caso las medidas de los tres ángulos serán α, 4α, 4α

Como la suma de los ángulos internos debe ser $180°$, entonces se tiene las siguientes opciones:

I Caso:

$$\begin{aligned} \alpha+\alpha+4\alpha=180° &\Rightarrow 6\alpha=180° \\ &\Rightarrow \alpha=30° \\ &\Rightarrow \text{las medidas de los ángulos son } 30°,\ 30°,\ 120° \end{aligned}$$

II Caso:

$$\begin{aligned} \alpha+4\alpha+4\alpha=180° &\Rightarrow 9\alpha=180° \\ &\Rightarrow \alpha=20° \\ &\Rightarrow \text{las medidas de los ángulos son } 20°,\ 80°,\ 80° \end{aligned}$$

Por lo tanto el triángulo podría ser obtusángulo o acutángulo.

Ejemplo 11. (Pregunta $N°$ 25, I Eliminatoria 2015, I Nivel)

En el triángulo equilátero $\triangle ABC$, sean M y N los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Sea P el pie de la perpendicular sobre $\overline{AC}$ desde M. Si se traza una recta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ por P y llamamos Q al punto de intersección de esta recta con $\overline{MN}$, entonces $m\angle PQN$ es

(a) $60°$

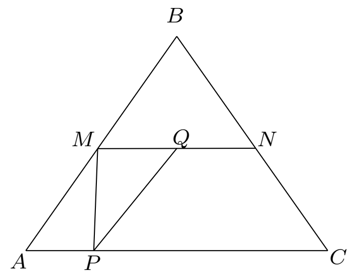
(b) $105°$

(c) $120°$

(d) $135°$

Solución

Con la información del enunciado se puede construir la siguiente figura:



En $\triangle AMP$, $m\angle MAP = 60°$, por ser uno de los ángulos del triángulo equilátero y $m\angle APM = 90°$, por ser el pie de la perpendicular. Como la suma de los ángulos internos debe ser $180°$, se tiene que $m\angle AMP = 30°$.

Por otra parte $\overleftrightarrow{AM} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$, por lo que $\angle AMP \cong \angle MPQ$ por ser alternos internos entre paralelas. Entonces $m\angle MPQ = 30°$.

Además $m\angle PMQ = 90°$. Entonces, por el teorema de la medida del ángulo externo, $m\angle PQN = m\angle PMQ + m\angle MPQ = 90° + 30° = 120°$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opión c).

Comentario:
Observe que una de las principales dificultades de este ejercicio es que el enunciado no da la figura, sino que da una descripción y con base en esto debemos construirla.

Note también que este ejemplo está en la sección de clasificación de triángulos, sin embargo lo único que se utiliza de este tema es que cada ángulo interno mide $60°$, pero se utilizan muchos conceptos más, como el teorema de la medida del ángulo externo de un triángulo, la suma de los ángulos internos, la clasificación de ángulos formaos por dos rectas paralelas y una transversal. Con esto se quiere hacer énfasis en que no deben verse los temas de forma aislada, sino como algo general e integrados entre sí

6. Áreas y perímetros.

6.1. Área y perímetro del triángulo

Para calcular el área de un triángulo se utiliza la siguiente fórmula:

$$\text{Área del triángulo} = \frac{base \times altura}{2}$$

El perímetro es la suma de las medidas de los tres lados.

En muy pocos casos se presentan preguntas de olimpiadas donde se deban aplicar únicamente los conceptos de áreas y perímetros de triángulos, por lo general se tienen figuras compuestas por triángulos y cuadriláteros o círculos.
Debido a esto primero recordaremos las fórmulas de áreas y perímetros de cuadriláteros antes de ver algunos ejemplos.

6.2. Área y perímetro de cuadriláteros

Recuerde que los cuadriláteros se pueden clasificar en paralelogramos (en cada par de lados opuestos, dichos lados son paralelos) y no paralelogramos (en al menos uno de los pares de lados opuestos, dichos lados no son paralelos).

Para calcular el área de un paralelogramo siempre se puede utilizar la siguiente fórmula:

$$\text{Área de un paralelogramo} = base \times altura$$

El perímetro es la suma de las medidas de los cuatro lados.

También se tiene fórmulas específicas dependiendo del tipo de paralelogramo. Estas fórmulas se resumen a continuación:

Paralelogramo	**Área**	**Perímetro**
Cuadrado	$(lado)^2$	$lado \times 4$
Rectángulo	$lado \times ancho$	$largo \times 2 + ancho \times 2$
Rombo	$\frac{diagonal\ \ mayor \times diagonal\ \ menor}{2}$	$lado \times 4$

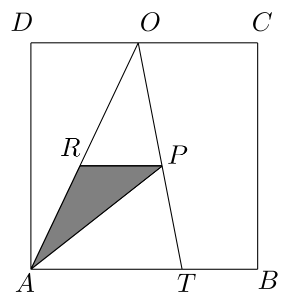
En el caso de los no paralelogramos, se pueden clasificar en trapecio (tiene un par de lados opuestos paralelos y los otros dos no paralelos) y trapezoide (no tiene ningún par de lados paralelos)

Únicamente el trapecio tiene una fórmula particular para su área:

$$\text{Área de un trapecio} = \frac{(base\ \ mayor + base\ \ menor) \times altura}{2}$$

Ejemplo 12. (Pregunta $N°4$, I Eliminatoria 2010 Nivel A)

En la siguiente figura se muestra el cuadrado $\square ABCD$ de lado $4cm$. Sea O es el punto medio de $\overline{DC}$, R es el punto medio de $\overline{AO}$, T es tal que $3TB = AT$ y P es el punto medio de $\overline{OT}$



Entonces el área, en centímetros cuadrados, de la parte sombreada corresponde a

(a) $\frac{1}{2}$

(b) 1

(c) 2

(d) $\frac{3}{2}$

Solución

Se indica que cada lado del cuadrado $ABCD$ mide 4 unidades, es decir, $AB = 4$. Además se observa en la figura que $AT + TB = AB = 4$ y como $AT = 3TB$ entonces se tiene $3TB + TB = 4$, es decir, $TB = 1$ y $AT = 3$.

Por otro lado, observe que RP es paralela media del $\triangle AOT$, pues R y P son los puntos medios de $\overline{AO}$ y $\overline{OT}$, entonces RP mide la mitad de AT, de donde $RP = \frac{3}{2}$.

Podemos calcular el área sombreada como el área del $\triangle ARP$, utilizando el lado RP como base. Veamos que la altura h de este triángulo es la distancia desde A hasta la recta $\overleftrightarrow{RP}$, pero como RP es paralela media del $\triangle AOT$, entonces dicha recta divide el cuadrado a la mitad, es decir, la altura mide la mitad del lado del cuadrado.

Entonces el área sombreada es $A = \dfrac{base \times altura}{2} = \dfrac{\frac{3}{2} \times 2}{2} = \dfrac{3}{2}$

> **Comentario:** Observe como se utilizó la fórmula para el área del triángulo pero tomando la base de manera adecuada. Cualquiera de los tres lados de un triángulo puede funcionar como base siempre y cuando sea posible averiguar su medida y la medida de la altura sobre ese lado. Otro de los conceptos utilizados en este ejercicio fue el de la Paralela Media de un triángulo: El segmento que une los puntos medios de los lados de un triángulo es paralelo a tercer lado y su longitud es la mitad de ese tercer lado.

Ejemplo 13. (Pregunta $N°17$, I Eliminatoria 2015, I Nivel)

Considere que $\square ABCD$ es un trapecio rectángulo con base mayor $\overline{AB}$, recto en B, cuya base menor mide la mitad de la base mayor. Sean P y Q puntos en $\overline{AB}$ tales que $BP = PQ = QA$ y R en $\overline{CD}$. Se puede afirmar que $\dfrac{(ABCD)}{(PQR)}$ es

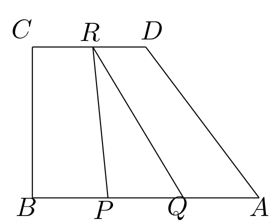
(a) $\dfrac{9}{4}$

(b) $\dfrac{1}{4}$

(c) $\dfrac{10}{3}$

(d) $\dfrac{9}{2}$

Solución
Respuesta correcta: opción d.



Como $BP = PQ = QA$, se tiene que $AB = 3PQ$.

Llamemos $PQ = b$, por lo que $AB = 3b$ y $CD = \frac{3b}{2}$, además llamemos h a la altura del trapecio.

Entonces las áreas buscadas se pueden expresar en térmnos de b y h de la siguiente forma

$(ABCD) = \dfrac{(3b + \frac{3b}{2})h}{2} = \dfrac{9bh}{4}$ y $(PQR) = \dfrac{bh}{2}$

Por lo que

$$\frac{(ABCD)}{(PQR)} = \frac{9bh}{4} \div \frac{bh}{2} = \frac{9}{2}$$

6.3. Círculo y circunferencia

El área de un círculo de radio se calcula con la fórmula $A = \pi r^2$

La longitud de una circunferencia de radio r se calcula con la fórmula $C = 2\pi r$

Ejemplo 14. (Pregunta $N°2$, I Eliminatoria 2013, II Nivel)

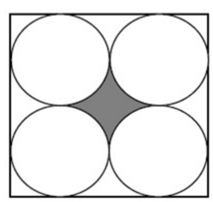
El área sombreada con gris en centímetros cuadrados de la figura adjunta, que representa cuatro círculos inscritos en un cuadrado cuya área es de $64cm^2$ corresponde a

(a) 16π

(b) $32 - 4\pi$

(c) $64 - 4\pi$

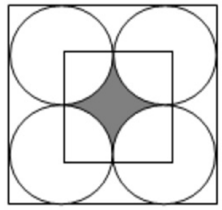
(d) $16 - 4\pi$



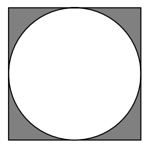
Solución

Como se indica que el área del cuadrado es $64cm^2$ y sabemos que el área del cuadrado se calcula multiplicando lado por lado, entonces el lado del cuadrado mide $8cm$. Además, dos diámetros de los círculos miden lo mismo que el lado del cuadrado, por lo que cada diámetro mide $4cm$, es decir, cada radio mide $2cm$.

Por otra parte, observe que si se unen los centros de los cuatro círculos se forma un cuadrado cuyo lado mide $4cm$, pues el lado de este cuadrado está formado por dos radios.



Pero también se puede observar que dentro de este cuadrado pequeño se encuentran cuatro cuadrantes de círculo, que tienen un área equivalente al de un solo círculo. Es decir que el área sombreada equivale al de la siguiente figura, en la cual se reacomodaron los cuatro cuadrantes para formar un solo círculo.



Entones el área sombreada se puede calcular restando al área del cuadrado de lado 4cm el área del círculo de radio 2cm.

$$\begin{aligned}
\text{Área sombreada} &= \text{área del cuadrado - área del círculo} \\
&= lado \times lado - \pi r^2 \\
&= 4 \times 4 - \pi(2)^2 \\
&= 64 - 4\pi
\end{aligned}$$

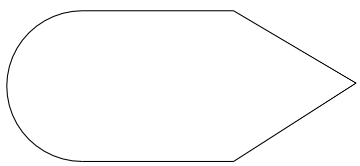
Comentario: Se debe notar que lo importante en este ejercicio fue las diferentes formas en que se observó el área sombreada, para reacomodarla de una manera más adecuada.

7. Ejercicios adicionales.

A continuación se presenta una lista de ejercicios, tomados de ediciones anteriores de la Olimpiada Costarricense de Matemática, en los cuales se aplican los conceptos desarrollaos en este documento. Se recomienda tratar de resolverlos antes de consultar las soluciones dadas en el capítulo 8.

1) Pregunta $N°14$, I Eliminatoria 2008 Nivel A.

   Se desea cercar un terreno como el que se muestra en la figura, formado por un cuadrado, un semicírculo y un triángulo equilátero. Si el lado del triángulo mide $150m$, el total de metros de alambre que se necesita es

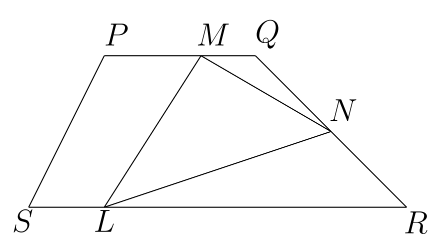
   

   (a) $1050 + 150\pi$
   (b) 1200
   (c) $675 + \pi$
   (d) $600 + 75\pi$

2) Pregunta $N°13$, I Eliminatoria 2010 Nivel A.

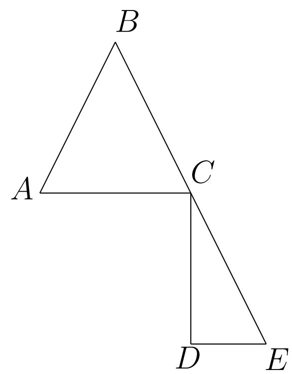
   En el trapecio $PQRS$, $PQ \| SR$ y $SR = 2PQ$. M es el punto medio de $\overline{PQ}$, N es el punto medio de $\overline{QR}$ y L es un punto en $\overline{SR}$ tal que $LR = 3LS$. Si $PQ = 1cm$, entonces la razón entre el área de $\triangle LMN$ y el área dle trapecio $PQRS$ es la siguiente:

   (a) $\dfrac{1}{2}$
   (b) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$
   (c) $\dfrac{2}{3}$
   (d) $\dfrac{1}{3}$

3) Pregunta $N°3$, I Eliminatoria 2011, Nivel A.

En la figura,$\triangle ABC$ es equilátero, $\triangle CDE$ es rectángulo en D y $B-C-E$.
Entonces, el ángulo $\angle DCE$ mide



(a) $22,5°$

(b) $30°$

(c) $45°$

(d) $60°$

4) Pregunta $N°10$, I Eliminatoria 2011, Nivel A.

El área de un cuadrado es el doble del área de un triángulo y la base del triángulo mide el doble del lado del cuadrado. Entonces la razón entre el lado del cuadrado y la altura del triángulo es

(a) $\frac{1}{4}$

(b) $\frac{1}{2}$

(c) 1

(d) 2

5) Pregunta $N°17$, I Eliminatoria 2011, Nivel A.

Sea $\square ABCD$ un rectángulo tal que $BC = 2AB$, $\triangle BCE$ es un triángulo equilátero cuyos lados intersecan a $\overline{AD}$ y M el punto medio de $\overline{CE}$. Entonces la medida del $\angle CMD$ es

(a) $60°$

(b) $75°$

(c) $80°$

(d) $87°$

6) Pregunta $N°3$, I Eliminatoria 2012, Nivel A.

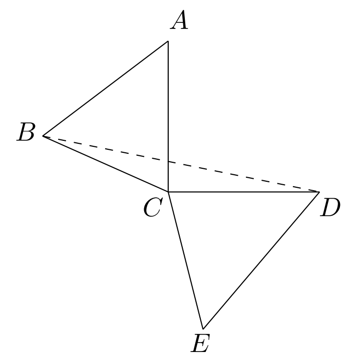
En la figura, $\triangle ABC$ y $\triangle CDE$ son equiláteros con $AC = CD$. Si el ángulo $\angle ACD$ mide $80°$, entonces la medida del ángulo $\angle ABD$ es

(a) 30°

(b) 35°

(c) 40°

(d) 45°



7) Pregunta $N°4$, I Eliminatoria 2012, Nivel A.

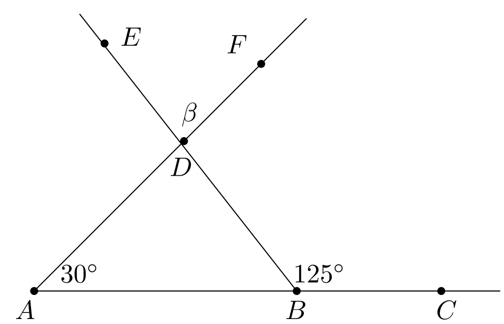
En la siguiente figura, la medida del ángulo β corresponda a

(a) 75°

(b) 85°

(c) 95°

(d) 125°



8) Pregunta $N°8$, I Eliminatoria 2012, Nivel A.

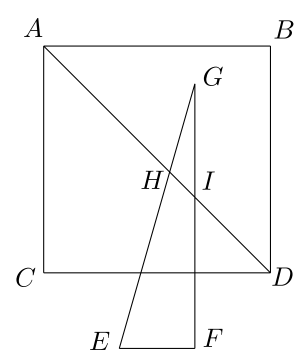
En la figura el $\square ABDC$ es un cuadrado, además $\overline{GF} \| \overline{BD}$, $\overline{EF} \| \overline{BA}$ y $\angle GEF = 60°$. La medida del $\angle GHA$ es

(a) 90°

(b) 75°

(c) 65°

(d) 35°



9) Pregunta $N°15$, I Eliminatoria 2012, Nivel A.

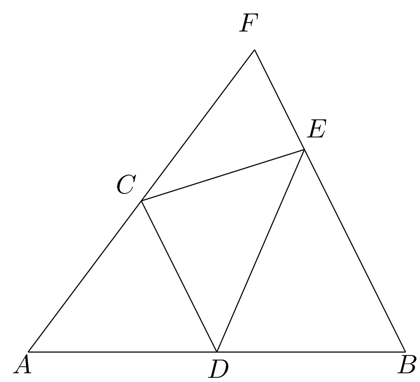
La cantidad de triángulos isósceles distintos de perímetro $25cm$ y lados de longitudes enteras que pueden formarse es

(a) 5
(b) 6
(c) 7
(d) 12

10) Pregunta $N°23$, I Eliminatoria 2013, I Nivel.

Se construyen triángulos de tal manera que todas las longitudes de sus lados son números enteros. Si $AD = CD = 3cm$, $FE = 2cm$, $EB = 5cm$ y el resto de los segmentos tienen la misma medida ¿Cuál es la menor medida posible para estos segmentos?

(a) $1cm$
(b) $2cm$
(c) $3cm$
(d) $4cm$



11) Pregunta $N°24$, I Eliminatoria 2013, I Nivel.

La medida de los ángulos internos de un triángulo son tales que si se ordenan de mayor a menor, la diferencia entre cada dos consecutivos es 10 grados ¿Qué tipo de trángulo es?

(a) equiángulo
(b) acutángulo
(c) rectángulo
(d) obtusángulo

12) Pregunta $N°27$, I Eliminatoria 2013, I Nivel.

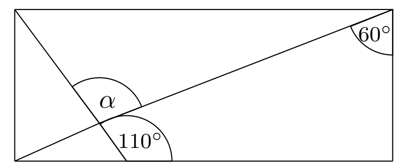
En el rectángulo de la figura adjunta, la medida del ángulo α corresponde a

(a) $70°$

(b) $80°$

(c) $110°$

(d) $150°$



13) Pregunta $N°1$, I Eliminatoria 2014, I Nivel.

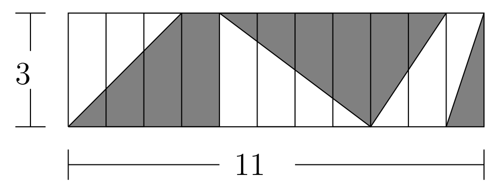
Determine el área sombreada en la figura adjunta

(a) 15

(b) 16

(c) 17

(d) 18



14) Pregunta $N°22$, I Eliminatoria 2014, I Nivel.

Considere un cuadrilátero $ABCD$ de lados paralelos opuestos $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$. Si $BD = AD$, $m\angle DCB = 110°$ y $m\angle CBD = 30°$ entonces $m\angle ADB$ es

(a) $110°$

(b) $85°$

(c) $95°$

(d) $100°$

15) Pregunta $N°23$, I Eliminatoria 2014, I Nivel.

En un triángulo isósceles ABC los lados de igual longutud son $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Si D, E, F son puntos sobre los lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ respectivamente tales que el triángulo DEF es equilátero y si $a = m\angle BFD$, $b = m\angle ADE$ y $c = m\angle FEC$ entonces se cumple que

(a) $b = \dfrac{a+c}{2}$
(b) $b = \dfrac{a-c}{2}$
(c) $a = \dfrac{b+c}{2}$
(d) $a = \dfrac{b-c}{2}$

16) Pregunta $N°8$, I Eliminatoria 2015, I Nivel.

Considere dos planos paralelos π_1 y π_2. Sean A, B, C, D cuatro puntos distintos en π_1 y E, F dos puntos distintos en π_2. La cantidad mínima de rectas distintas que quedan determinadas por dos de esos seis puntos es

(a) 2
(b) 4
(c) 10
(d) 12

17) Pregunta $N°18$, I Eliminatoria 2015, I Nivel.
Considere un triángulo rectángulo isósceles $\triangle ABC$ recto en B. Si se toma un punto M en $\overline{AB}$ y puntos P y Q en $\overline{AC}$ de forma que $A - P - Q - C$ y $\triangle MPQ$ es equilátero, entonces $m\angle BMQ$ es

(a) 75°
(b) 90°
(c) 105°
(d) 120°

18) Pregunta $N°19$, I Eliminatoria 2015, I Nivel.
Considere un triángulo rectángulo $\triangle ABC$, recto en B. Si P es el punto medio de $\overline{BC}$ y Q es un punto en $\overline{AB}$ tal que $BQ = 2AQ$, entonces $\dfrac{(AQC)}{(PQC)}$ es

(a) $\dfrac{1}{2}$

(b) 1

(c) 2

(d) $\dfrac{2}{3}$

19) Pregunta $N°20$, I Eliminatoria 2015, I Nivel.
Considere el triángulo rectángulo $\triangle ABC$ recto en A tal que $AB = 2AC$. Si D es un punto en $\overline{BC}$ tal que $DC = 2BD$, entonces el mayor de los siguientes ángulos agudos es

(a) $\angle DAC$

(b) $\angle ACB$

(c) $\angle ADC$

(d) $\angle ABD$

8. Solución a los ejercicios adicionales.

1) Pregunta $N°14$, I Eliminatoria 2008 Nivel A.

Solución

Como el triángulo es equilátero, el lado del cuadrado y el diámetro del semicírculo también miden $150m$.

Note que lo que necesitamos es encontrar la medida del perímetro de la figura y éste se obtiene sumando dos de los lados del triángulo, dos de los lados del cuadrado y la medida de la semicircunferencia.

Por lo tanto, se necesitan:

$300 + 300 + 75\pi = 600 + 75\pi$ metros de alambre.

2) Pregunta $N°13$, I Eliminatoria 2010 Nivel A.

Solución

Como $PQ = 1$ entonces $SR = 2PQ = 2$, $SL = \frac{1}{2}$ y $LR = \frac{3}{2}$

Si $2h$ es la altura del trapecio $PQRS$, su área es

$$\frac{(base\ \ mayor + base\ \ menor) \times altura}{2} = \frac{(2+1)2h}{2} = 3h$$

El área del romboide $PMLS$ es

$$base \times altura = \frac{1}{2} \times 2h = h$$

El área del triángulo $\triangle MQN$ es

$$\frac{base \times altura}{2} = \frac{\frac{1}{2} \times h}{2} = \frac{h}{4}$$

El área del $\triangle LRN$ es

$$\frac{base \times altura}{2} = \frac{\frac{3}{2} \times h}{2} = \frac{3h}{4}$$

Así, el área de $\triangle LMN$ es

$$(PQRS) - (PMLS) - (MQN) - (LRN) = 3h - h - \frac{h}{4} - \frac{3h}{4} = h$$

y la razón entre su área y el área del trapecio $PQRS$ es

$$\frac{(LMN)}{(PQRS)} = \frac{h}{3h} = \frac{1}{3}$$

3) Pregunta $N°3$, I Eliminatoria 2011, Nivel A.

Solución

$\triangle ABC$ equilátero $\Rightarrow \angle BCA = 60° \Rightarrow \angle CED = 60°$ pues son correspondientes entre paralelas. De donde $\angle DCE = 30°$, pues $\angle CED$ y $\angle DCE$ son complementarios.

4) Pregunta $N°10$, I Eliminatoria 2011, Nivel A.

Solución

Sea l el lado del cuadrado, b, h la base y altura del triángulo respectivamente. Sabemos $l^2 = 2\frac{bh}{2}$ y $b = 2l$ entonces, sustituyendo, $l^2 = 2 \cdot l \cdot h$, de donde $h = \frac{1}{2}l$.
Por tanto, $\frac{1}{h} = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot l} = 2$.

5) Pregunta $N°17$, I Eliminatoria 2011, Nivel A.

Solución

Tenemos que $EC = BC$. Además $2MC = EC = BC = 2AB \Rightarrow MC = AB = DC$. Así, el $\triangle CDM$ es isósceles.

Ahora

$$\begin{aligned} m\angle MCD &= m\angle BCD - m\angle BCE \\ &= 90° - 60° \\ &= 30° \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} m\angle MCD + m\angle MCD + m\angle MCD &= 180° \\ \Rightarrow 30° + 2m\angle CMD &= 180° \\ \Rightarrow m\angle CMD &= 75° \end{aligned}$$

6) Pregunta $N°3$, I Eliminatoria 2012, Nivel A.

Solución

El $\triangle BCD$ es isósceles y $m\angle BCD = 60° + 80° = 140°$. Por el teorema de la suma de los ángulos internos del triángulo $m\angle DBC = \dfrac{180° - 140°}{2} = 20°$ y como $m\angle ABC = 60°$, entonces $m\angle ABD = 60° - 20° = 40°$

7) Pregunta $N°4$, I Eliminatoria 2012, Nivel A.

Solución

La medida del ángulo adyacente al ángulo de 120° es 55°. Por el teorema del ángulo externo de un triángulo, la medida del ángulo β es $30° + 55° = 85°$. Así, la medida del ángulo adyacente al ángulo β es $180° + 85° = 95°$

8) Pregunta $N°8$, I Eliminatoria 2012, Nivel A.

Solución

Como se tiene que $\overline{GF} \| \overline{BD}$ entonces $m\angle GFE = 90°$, además como $m\angle GEF = 60°$ entonces $m\angle EGF = 30°$. Por otro lado, como $\overline{AD}$ es diagonal del cuadrado, entonces $m\angle ADC = 45°$, esto hace que $m\angle FID = 45°$, lo que impica que $m\angle GIH = 45°$ por ser opuestos por el vértice. Así como $m\angle EGF = 30°$ y $m\angle GIH = 45°$, por el teorema de medidas de ángulos externos se tiene que $m\angle GHA = 75°$

9) Pregunta $N°15$, I Eliminatoria 2012, Nivel A.

Solución

Llamemos x a la medida de los lados congruentes y y a la medida del tercer lado. Se debe cumplir que $2x + y = 25$. Como $2x$ siempre es par, se observa que y debe ser un número impar, de modo que la suma sea 25 que es impar

$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{x}$
1	12	12
3	11	11
5	10	10
7	9	9
9	8	8
11	7	7

Observe que si $y = 13$ se tendría $x = 6$, pero por el el teorema de la desigualdad triangular esto no puede ocurrir, pues $13, 6, 6$ no forman los lados de un triángulo. Note además que los dos lados de igual medida deben ser mayores que 6 y el otro lado menor o igual a 12. Además, los dos lados de igual medida deben ser menores que 13 para que el perímetro sea 25.

Así, hay un total de 6 posibilidades para los lados de igual medida.

10) Pregunta $N°23$, I Eliminatoria 2013, I Nivel.

Solución

Apicando la desigualdad triangular en los cinco triángulos que aparecen y recordando que las longitudes de los segmentos son enteras; se tiene que:

del $\triangle ACD : 3 + x > 34$ y $6 > x$,
del $\triangle CED : 2x > 3$,
del $\triangle DEB : 2x > 5$,
del $\triangle CFE : 2x > 2$,
y del $\triangle CED : 2x + 7 > 3 + x$, $10 + x = 2x$ y $3x + 3 > 7$

El menor número entero positivo que satisface esas condiciones es $x = 3cm$. La respuesta correcta es la opción C.

11) Pregunta $N°24$, I Eliminatoria 2013, I Nivel.

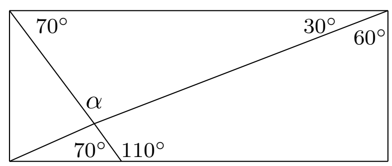
Solución

Si se considera como m la medida del menor de los ángulos, entonces al sumar los ángulos externos obtenemos la igualdad $3m + 30° = 180°$, es decir que m debe ser igual a 50° para que la igualdad se cumpla. Así la medida de los ángulos internos corresponde a 70°, 60° y 50°. Por lo tanto el triángulo es acutángulo. La respuesta correcta es la opción B.

12) Pregunta N°27, I Eliminatoria 2013, I Nivel.

Solución

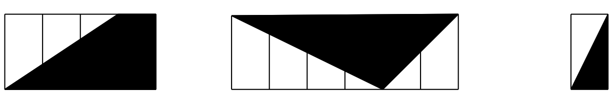
El ángulo adyacente al mide 100° mide $180° - 110° = 70°$ y por ser ángulos alternos internos entre paralelas, uno de los ángulos internos del triángulo que contiene a α mide 70, como el otro ángulo de ese triángulo mide $90° - 60° = 30°$, entonces $\alpha = 180 - 70 - 30 = 80$. La respuesta correcta es la opción B.



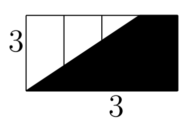
13) Pregunta N°1, I Eliminatoria 2014, I Nivel.

Solución

Separemos la figura así:

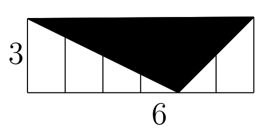


Considere la figura:



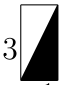
el área sombreada en esta figura es 7,5.

Ahora considere la figura:



Su área sombreada es 9.

Ahora considere la figura:



Su área es 1,5

$\therefore$ El área sombreada total es:

$$7{,}5 + 1{,}5 + 9 = 18$$

14) Pregunta $N°22$, I Eliminatoria 2014, I Nivel.

Solución

Al trazar la diagonal $\overline{BD}$ del cuadrilátero $ABCD$ en el triángulo BCD se tiene que $m\angle CDB = 180° - m\angle DCB - m\angle CBD = 40°$. Como los ángulos CDB y ABD son alternos internos y $BD = AD$ entonces $m\angle ABD = m\angle DAB = 40°$.
Así,

$$m\angle ADB = 180° - m\angle ABD - m\angle DAB = 180° - 2 \cdot 40° = 100°$$

15) Pregunta $N°23$, I Eliminatoria 2014, I Nivel.

Solución

Por el teorema de la medida del ángulo externo se tiene que $b + 60° = m\angle ABC + a$ y que $a + 60° = c + m\angle ACB$, restando ambas ecuaciones se obtiene

$$(b + 60°) - (a + 60°) = (m\angle ABC + a) - (c + m\angle ACB)$$
$$b - a = a - c + m\angle ABC - m\angle ACB$$

y como $m\angle ABC = m\angle ACB$ t por ser $(AB = AC)$ entonces $b - a = a - c$, es decir, $a = \dfrac{b+c}{2}$.

16) Pregunta $N°8$, I Eliminatoria 2015, I Nivel.

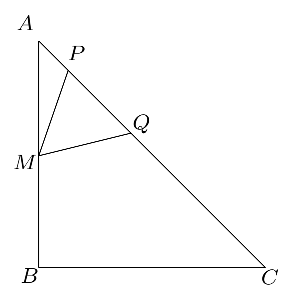
Solución

La menor cantidad de rectas se forman si A, B, C, D son colineales. se tendría así una sola recta en π_1 y una recta en π_2; además como los puntos son distintos, cada punto de π_1 con cada punto de π_2 determinará una recta distinta, es decir, 8 rectas más. Se tiene en total 10 rectas.

17) Pregunta $N°18$, I Eliminatoria 2015, I Nivel.

Solución

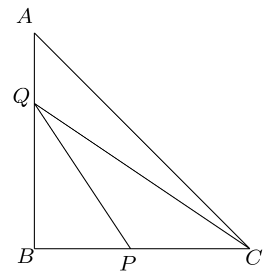
Como $\triangle ABC$ es rectángulo isósceles recto en B se tiene que $m\angle BAC = 45°$.
Como $\triangle MPQ$ es equilátero, $m\angle MPQ = 60°$ por lo que $m\angle MPA = 120°$.
Entonces, en $\triangle AMP$, por el teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos del triángulo, se tiene que $m\angle AMP = 15°$. Por lo tanto $m\angle AMQ = 75°$
Finalmente $m\angle BMQ = 180° - m\angle AMQ = 180° - 75° = 105°$



18) Pregunta $N°19$, I Eliminatoria 2015, I Nivel.

Solución

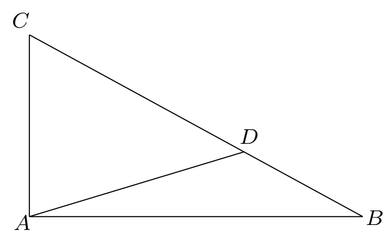
Llámese $AQ = b, PC = a$, por lo que $BQ = 2b$ y $BC = 2a$.
En $\triangle AQC$, tomando $\overline{AQ}$ como la base, se tiene $(AQC) = \dfrac{b \cdot 2a}{2} = ab$.
En $\triangle PQC$, tomando $\overline{PC}$ como la base, se tiene $(PQC) = \dfrac{a \cdot 2b}{2} = ab$.
Por lo tanto $\dfrac{(AQC)}{(PQC)} = \dfrac{ab}{ab} = 1$



19) Pregunta $N°20$, I Eliminatoria 2015, I Nivel.

Solución

Se sabe que $AB > AC$, por lo que $\angle ACB > \angle ABC$.
También se sabe que $BC > AB = 2AC$, por lo que $\dfrac{BC}{2} > AC$, y como $DC > \dfrac{BC}{2}$ entonces $DC > AC$, por lo que $\angle DAC > \angle ADC$
Finalmente $\angle DAC > \angle ACB$. Observe que si D fuese el punto medio de $\overline{BC}$, entonces $\triangle ADC$ sería isósceles, pero como $DC > \dfrac{BC}{2}$ entonces $\angle DAC > \angle ACB$.



9. Créditos

Este documento es un material de apoyo sobre Teoría de Números para estudiantes que participan en el primer nivel de la primera eliminatoria de la Olimpiada Costarricense de Matemática.

Autor

Leonel Chaves Salas.

Editor

Nícida Rojas Esquivel.

Revisor

Christhian Zamora Jaén.

Para referenciar este documento

Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas (2016). *Material de apoyo sobre Geometría: I nivel, I Eliminatoria.* San José, Costa Rica: autor.