
OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

UNA - UCR - TEC - UNED - MEP - MICIT



Teoría de Números



I Nivel
I Eliminatoria

Marzo, 2016



Índice

1. Presentación.	2
2. Contenidos de Teoría de Números.	3
3. Concepto de múltiplo y divisor.	4
3.1. Múltiplo de un número natural.	4
3.2. Divisor de un número entero.	6
4. Algoritmo de la división.	8
5. Número primos y compuestos.	9
6. Teorema fundamental de la aritmética: descomposición en factores primos.	11
7. Reglas de divisibilidad.	12
8. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor.	15
8.1. Mínimo común múltiplo.	15
8.2. Máximo común divisor	17
9. Ejercicios sobre teoría de números.	19
10. Solución a los ejercicios propuestos.	24
11. Créditos	27

1. Presentación.

Este es un material de apoyo sobre Teoría de Números. Está dirigido a estudiantes de primer año de secundaria que inician su preparación para la I Eliminatoria de la Olimpiada Costarricense de Matemática (OLCOMA). Se elaboró con la intención de familiarizar al estudiante con el tipo de problemas que se evalúan en esta etapa de la competencia y para que conozca algunas de las principales estrategias que se pueden utilizar para resolverlos.

Para cada uno de los contenidos sobre Teoría de Números que se evalúan en la I Eliminatoria se presenta un breve desarrollo teórico. Posteriormente, se ejemplifica su aplicación por medio de problemas resueltos tomados de las primeras eliminatorias de años anteriores (2008-2015). Se destaca que el desarrollo teórico se ha realizado principalmente desde un punto de vista intuitivo, esto por el nivel de la competencia al que corresponde. Otros materiales para niveles superiores incluyen estos contenidos con más formalidad matemática.

Para que el(la) estudiante ponga en práctica los conocimientos desarrollados se incluye una sección con 20 problemas propuestos y otra con las respectivas soluciones.

A continuación se presenta la primera sección que contiene el temario de Teoría de Números para el I nivel y I Eliminatoria de OLCOMA.

2. Contenidos de Teoría de Números.

Estos son los contenidos que se evalúan en el tema de Teoría de Números para el I nivel de la I Eliminatoria de OLCOMA.

- Concepto de divisibilidad: divisor, múltiplo. Propiedades. Obtener los divisores positivos de un número natural.
- Algoritmo de la división.
- Números primos y compuestos.
- El teorema fundamental de la aritmética (descomposición canónica).
- Reglas de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11.
- Notación desarrollada de un número en base 10.
- Máximo común divisor. Mínimo común múltiplo.

3. Concepto de múltiplo y divisor.

Los conceptos de múltiplo y divisor de un número son dos de los que aparecen con mayor frecuencia en los problemas del primer nivel de OLCOMA. Una prueba de esto es que solo en la I eliminatoria del I nivel del 2014 hay tres ejercicios que pueden resolverse por medio de estos conceptos. A continuación se presenta la definición de múltiplo de un número natural y un problema en el cual se ejemplifica cómo utilizar el concepto.

3.1. Múltiplo de un número natural.

Un número natural es múltiplo de otro si lo contiene un número entero de veces. Por ejemplo 12 es múltiplo de 6, pues $12 \div 6 = 2$. Para determinar los múltiplos de un número natural se multiplica ese número por los números naturales 1, 2, 3, Dado que $6 = 6 \cdot 1$, $12 = 6 \cdot 2$, $18 = 6 \cdot 3$, $24 = 6 \cdot 4$ y $30 = 6 \cdot 5$, los múltiplos de 6 menores a 34 son $\{6, 12, 18, 24, 30\}$. Observe que el cociente que se obtiene al dividir 34 entre 6 es 5, que es precisamente la cantidad de múltiplos de 6 menores a 34.

Algunas propiedades de los múltiplos son las siguientes:

1. Todo número distinto de 0 es múltiplo de sí mismo, del número 1 y tiene infinito número de múltiplos. Por ejemplo, 5 es múltiplo de sí mismo ya que $5 \div 5 = 1$. También es múltiplo de 1 puesto que $5 \div 1 = 5$. Por último existe una cantidad infinita de múltiplos de 5: todos aquellos números cuya cifra de las unidades es 5 o 0.
2. La suma de varios múltiplos de un número es otro múltiplo de dicho número. Por ejemplo, 3, 6, 18, 24 son múltiplos de 3 y observe que $3 + 6 + 18 + 24 = 51$ el cual es múltiplo de 3 puesto que $51 \div 3 = 17$.
3. La diferencia de dos múltiplos de un número es otro múltiplo de dicho número. Por ejemplo: 10 y 6 son múltiplos de 2, y note que $10 - 6 = 4$, que es otro múltiplo de 2
4. Si un número es múltiplo de otro, y éste lo es de un tercero, el primero es múltiplo del tercero. Por ejemplo, 64 es múltiplo de 32 y 32 es múltiplo de 8. Observe que 64 es múltiplo de 8.
5. Si un número es múltiplo de otro, todos los múltiplos del primero lo son también del segundo. Por ejemplo, 16 es múltiplo de 4. Note que cualquier múltiplo de 16 es también múltiplo de 4.

Analice el siguiente problema en el que se utiliza el concepto de múltiplo.

Problema 1

Por un error en la fotocopidora, en un libro de 400 páginas se dejaron en blanco todas las páginas cuyos números de página eran múltiplos de 3 o de 4, determine cuántas páginas se fotocopiaron correctamente.

- (a) 150
- (b) 200
- (c) 220
- (d) 250

Ítem 18. I Eliminatoria, I nivel 2014

Solución

Para resolver el problema se debe determinar la cantidad de múltiplos de 3 y 4 menores que 400.

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, la cantidad de múltiplos de 3 menores que 400 es 133. Esto porque el cociente de la división de 400 por 3 es 133. De forma análoga, hay 100 múltiplos de 4 menores que 400.

Ahora se deben restar todos los números que son múltiplos de ambos, es decir los múltiplos de 12 (pues se consideraron dos veces) que en total son 33 pues el cociente entre 400 y 12 es 33. Por lo tanto se dejaron en blanco $133 + 100 - 33 = 200$ páginas y se fotocopiaron correctamente 200 páginas. La opción correcta es la b.

Otro problema en que se aplica este concepto es el siguiente.

Problema 2

¿Cuántos números impares menores a 500 al ser divididos por 3, por 4 y por 5 dejan residuo 1?

- (a) 5
- (b) 9
- (c) 36
- (d) 60

Ítem 6. I Eliminatoria, I nivel 2015

Solución

Si al dividir un número impar por 3, 4 y 5 deja residuo 1, entonces su antecesor debe ser múltiplo de 3, 4 y 5. Dado que 3, 4 y 5 no tienen divisores en común entonces cualquier múltiplo

común a ellos debe ser un múltiplo de $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

Determinemos los múltiplos pares de 60 menores a 500. Estos son: 0, 60, 120, 180, 240, 300, 360, 420, 480. Los sucesores de estos números son: 1, 61, 121, 181, 241, 301, 361, 421 y 481. Por lo tanto hay 9 números que cumplen las condiciones del problema. La opción correcta es la b.

Un concepto relacionado al de múltiplo es el de divisor de un número entero el cual se presenta a continuación.

3.2. Divisor de un número entero.

Un número a es divisor de un número b si la división de b entre a es exacta. Se acostumbra a escribir $a \mid b$ para indicar que a es un divisor de b . Por ejemplo, 2 es un divisor del 6 ya que la división de 6 entre 2 es exacta.

A diferencia de los múltiplos, en que cualquier número distinto de 0 tiene infinito número de múltiplos, un número tiene una cantidad finita de divisores. Para hallar los divisores de un número se divide sucesivamente entre 1, 2, 3, 4, 5, ... y aquellos números para los que la división sea exacta serán sus divisores. Por ejemplo, los divisores de 32 son $\{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$.

Otras propiedades de los divisores son:

1. Todo número distinto de 0 es divisor de sí mismo. Por ejemplo, 10 es divisor de sí mismo ya que $10 \div 10 = 1$
2. El número 1 es divisor de cualquier número.
3. Si un número es divisor de otros dos, también lo es de su suma y de su diferencia. Por ejemplo, 2 es un divisor de 8 y 12, note que 2 es divisor de $8 + 12 = 20$ y $12 - 8 = 4$.
4. Si un número es divisor de otro, también lo es de cualquier múltiplo del segundo. Por ejemplo, 3 es divisor de 15. Observe que 3 es un divisor de 45 que es un múltiplo de 3.
5. Si un número es divisor de otro, y éste lo es de un tercero, el primero lo es del tercero. Por ejemplo, 4 es un divisor de 16 y 16 es un divisor de 64. En consecuencia 4 es un divisor de 64.

Observe cómo se utiliza el concepto de divisor para resolver el siguiente problema.

Problema 3

¿Cuál de las siguientes parejas de números enteros tienen más divisores en común?

- (a) 24 y 18
- (b) 56 y 98
- (c) 72 y 36
- (d) 105 y 216

Ítem 13. I Eliminatoria, I nivel 2014

Solución

Denotemos con D_a los divisores del número a .

$$D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$$D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

Divisores en común del 24 y 18 son $\{1, 2, 3, 6\}$

Verifique que:

Los divisores en común del 56 y 98 son $\{1, 2, 7, 14\}$

Los divisores en común del 72 y 36 son $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 36\}$

El único divisor en común del 105 y 216 es $\{3\}$

Por lo que la pareja de números que tiene más divisores en común es 72 y 36. Opción correcta c.

En la solución del siguiente problema también se puede aplicar el concepto de divisor de un número entero.

Problema 4

En un laboratorio clínico han recolectado más de 40 muestras y menos de 50. Se quieren refrigerar en recipientes de modo que en cada uno haya la misma cantidad de muestras y que todos los recipientes queden completos. Cada recipiente debe contener al menos tres muestras. Si solo puede hacerse de tres maneras, la cantidad máxima de recipientes que se necesitan es

- (a) 15
- (b) 16
- (c) 22
- (d) 23

Ítem 14. I Eliminatoria, I nivel 2015

Solución

Para resolver el ejercicio se debe encontrar un número mayor que 40 y menor que 50 que tenga exactamente tres divisores propios, es decir, sin tomar en cuenta el 1 y el mismo número como posibles divisores. Por otra parte, cada divisor propio debe ser mayor o igual a tres, esto porque el problema indica que cada recipiente debe contener al menos tres muestras. Analicemos cada número entero entre 41 y 49.

- 41 es primo. Por lo tanto no tiene divisores propios.
- 42 tiene dos divisores propios: 2 y 21.
- 43 es primo. No tiene divisores propios.
- 44 tiene tres divisores propios: 2, 4 y 11.

- 45 tiene tres divisores propios: 3, 5 y 9.
- 46 tiene dos divisores propios: 2 y 23.
- 47 es primo. No tiene divisores propios.
- 48 tiene más de tres divisores.
- 49 tiene un divisor propio.

Según la lista anterior únicamente el número 45 tiene tres divisores propios mayores o iguales a 3. Esto quiere decir que la cantidad de muestras recolectadas es de 45. Además estas pueden refrigerarse de las tres siguientes formas: (1) en 15 recipientes con tres muestras cada uno. (2) en nueve recipientes con cinco muestras cada uno y (3) en cinco recipientes con nueve muestras cada uno. Por lo tanto la cantidad máxima de recipientes que se necesitan es de 15 en el que cada uno contiene tres muestras. La respuesta correcta es la opción a.

4. Algoritmo de la división.

Al dividir un número por otro se obtiene siempre un cociente y un residuo. Por ejemplo, al dividir 98 por 5, el cociente es 19 y el residuo 3.

El algoritmo de la división establece que dados dos números (dividendo y divisor) existe otros dos números (cociente y residuo) que cumplen la siguiente propiedad:

Dividendo es igual al cociente por el divisor más el residuo. El residuo siempre es igual o mayor que cero y menor que el divisor.

De acuerdo con el algoritmo de la división $98 = 5 \cdot 19 + 3$.

Una aplicación común del algoritmo de la división se presenta en el siguiente problema.

Problema 5

El dígito de las unidades del número 23^{2014} corresponde a

- (a) 1
- (b) 3
- (c) 7
- (d) 9

Ítem 20. I Eliminatoria, I nivel 2014

Solución

Para resolver ejercicios de este tipo se debe buscar un patrón o ciclo en la cifra de las unidades de las potencias de 23.

Observe que el dígito de las unidades de 23^1 es 3, de 23^2 es 9, de 23^3 es 7, de 23^4 es 1 y a partir de ahí se repite un ciclo de periodo 4. Debido a esto se puede establecer una relación entre el residuo de la división del exponente de la potencia y 4. Si el residuo es 1 entonces la cifra de las unidades es 3, si el residuo es 2 entonces la cifra de las unidades es 9, si el residuo es 3 la cifra de las unidades es 7 y si el residuo es 0 la cifra de las unidades es 1. Dado que al dividir 2014 por 4 se obtiene cociente 503 y residuo 2, entonces 23^{2014} termina en 9. La opción correcta es d.

Otro problema donde se puede aplicar el algoritmo de la división es el siguiente.

Problema 6

En la siguiente secuencia A1G2A1A1G2A1A1G2A1A1G..., la letra o el número que se encuentra en la posición 2015 es

- (a) A
- (b) G
- (c) 1
- (d) 2

Ítem 15. I Eliminatoria, I nivel 2015

Solución

Observe que en la secuencia dada hay un período de 6 elementos: A1G2A1. Luego al dividir 2015 por 6 se obtiene 335 y residuo cinco. Por lo tanto la letra que se encuentra en la posición 2015 es la quinta del período, es decir, la letra A. Así la respuesta correcta es la opción A.

5. Número primos y compuestos.

Un número es primo si sólo es divisible por sí mismo y por 1. Si un número no es primo diremos que es compuesto. El 0 y el 1 no son ni primos ni compuestos.

Los 25 primeros números primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 y 97, que son todos los primos menores que 100.

El algoritmo más sencillo que puede utilizarse para saber si un número n es primo es el de la división. Se trata de determinar si tiene algún divisor distinto de 1 y el mismo número. Para ello se divide el número n entre 2, 3, 4, 5, ... , $n - 1$. Si alguna de las divisiones es exacta podemos asegurar que el número n es compuesto. Si ninguna de estas divisiones es exacta, el número n

es primo. Este método puede hacerse más eficiente observando simplemente, que si un número es compuesto alguno de sus factores (sin contar el 1) debe ser menor o igual que \sqrt{n} . Por lo tanto, el número de divisiones a realizar es mucho menor. Sólo hay que dividir entre 2, 3, 4, 5, ..., \sqrt{n} . Es decir, bastaría hacer las divisiones entre los números primos menores o iguales que \sqrt{n} .

Estudie la solución de los siguientes problemas en los que se utilizan el concepto de número primo.

Problema 7

Si la suma de tres números primos menores que 100 es 118, entonces uno de los números es

- (a) 2
- (b) 31
- (c) 61
- (d) 83

Ítem 16. I Eliminatoria, I nivel 2015

Solución

Si los tres números primos del problema fuesen distintos de 2, entonces su suma sería impar, esto porque la suma de tres números impares es impar. Debido a esto uno de los números dados debe ser primo par, es decir, uno de los tres números es el 2, ya que es el único primo par. Luego los otros dos números son 37 y 39. La respuesta correcta es la opción a.

Problema 8

La cantidad de números primos menores que 100 tales que el mínimo común múltiplo de sus dígitos sea 6 corresponde a

- (a) 1
- (b) 2
- (c) 3
- (d) 4

Ítem 24. I Eliminatoria, nivel A 2012

Solución

Los números de 0 a 100 que satisfacen que el mínimo común múltiplo de sus dígitos sea 6 corresponden a 66, 62, 63, 26, 36, 16, 61, 23, 32. De ellos solo son primos el 61 y 23. Por lo tanto, solo dos números cumplen esta condición. La opción correcta es la b.

6. Teorema fundamental de la aritmética: descomposición en factores primos.

El teorema fundamental de la aritmética garantiza que todo número compuesto se puede descomponer de forma única (salvo el orden de los factores) en un producto de números primos. Esto fue demostrado por Gauss (1777-1855).

Para descomponer un número compuesto, por ejemplo 180, como el producto de factores se realiza el siguiente procedimiento:

1. Escribir el número compuesto y a su derecha se traza una línea vertical.

$$180 \left| \right.$$

2. Dividir el número por el menor primo que sea posible: 2, 3, 5,... . Colocar el divisor (el número primo) en la parte superior del lado derecho de la línea vertical y el cociente debajo del primer número en la izquierda del la línea vertical.

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & \end{array}$$

3. Repetir el proceso hasta que en la parte izquierda aparezca un 1. Esto indica que la descomposición habrá terminado.

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

La descomposición en factores primos de 180 es $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Observe que $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$

En la solución del siguiente problema se emplea el teorema fundamental de la aritmética.

Problema 9

El triple del producto de las edades de un padre y su hijo es 2013. Si ambos cumplen años el mismo día, entonces cuando nació el hijo la edad del padre era

- (a) 48
- (b) 49
- (c) 50
- (d) 51

Ítem 11. I Eliminatoria, I nivel 2013

Solución

Por el teorema fundamental de la aritmética, 2013 puede descomponerse como el producto de números primos. Al descomponer 2013 en factores primos se obtiene $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$. Esto quiere decir que 2013 se expresa de forma única como el triple producto de 11 y 13. Dado que el triple producto de las edades del padre y el hijo es 2013 se tiene que la edad del padre es 61 y la del hijo 11. Por lo tanto, la edad del padre era 50 cuando nació el hijo. La respuesta correcta es la opción c.

7. Reglas de divisibilidad.

Como se estudió en el apartado 1, para hallar los divisores de un número n se debe dividir dicho número por $1, 2, 3, \dots, n$. Si la división es exacta el número por el que se ha dividido es un divisor de n .

Si el número es grande hacer una división puede llevar mucho tiempo. Además no interesa el cociente de la división en sí sino si es exacta o no.

También se estudió en el apartado 4 sobre el teorema fundamental de la aritmética que para descomponer un número en producto de factores primos, se debe determinar si es divisible por los sucesivos números primos $2, 3, 5, \dots$

En ambos casos el trabajo a realizar se verá simplificado si se tiene en cuenta las llamadas *reglas de divisibilidad*, que indican si un número es divisible o no por otro sin necesidad de efectuar la división.

Las principales y más usadas reglas de divisibilidad son:

1. Un número es divisible por 2 si la cifra de las unidades es 0 o un número par.
2. Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es divisible por 3.

3. Un número es divisible por 4 si el número formado por sus dos últimas cifras es divisible por 4.
4. Un número es divisible por 5 si la cifra de las unidades es 0 o 5.
5. Un número es divisible por 6 si es divisible por 2 y por 3 a la vez.
6. Un número entero es divisible por 7 si la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades es divisible por 7. Si no es claro que el número obtenido sea divisible por 7 se puede seguir el procedimiento descrito anteriormente hasta obtener un número que, a simple vista, lo sea o no.
7. Un número es divisible por 8 si sus tres últimas cifras es divisible por 8.
8. Un número es divisible por 9 si la suma de sus cifras es divisible por 9.
9. Un número es divisible por 10 si la cifra de las unidades es 0.
10. Un número es divisible por 11 si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar impar y la suma de las que ocupan lugar par es divisible por 11.

El siguiente problema es un ejemplo clásico en el que se aplican las reglas de divisibilidad.

Problema 10

¿Cuántos posibles números de la forma $5a6b$ son divisibles por 6?, siendo a y b los dígitos de las centenas y unidades, respectivamente.

- (a) 5
- (b) 10
- (c) 16
- (d) 32

Ítem 12. I Eliminatoria, I nivel 2014

Solución

Según las reglas de divisibilidad descritas, el número entero $5a6b$ es divisible por seis si es divisible por dos y por tres a la vez. Analicemos cada caso por separado.

Caso I: $5a6b$ divisible por 2.

Según las reglas de divisibilidad, $5a6b$ es divisible por dos si la cifra de las unidades es par, esto es si $b \in \{0, 2, 3, 4, 6, 8\}$

Caso II: $5a6b$ divisible por 3.

Según las reglas de divisibilidad, $5a6b$ es divisible por tres si la suma de sus cifras es divisible por 3, esto es si $5 + a + 6 + b$ es divisible por tres o lo que es lo mismo si $11 + a + b$ es divisible por tres. Sustituyendo los posibles valores de b obtenidos en el caso I se obtiene:

- Si $b = 0$ entonces $a \in \{1, 4, 7\} \Rightarrow 3$ números diferentes.
- Si $b = 2$ entonces $a \in \{2, 5, 8\} \Rightarrow 3$ números diferentes.
- Si $b = 4$ entonces $a \in \{0, 3, 6, 9\} \Rightarrow 4$ números diferentes.
- Si $b = 6$ entonces $a \in \{1, 4, 7\} \Rightarrow 3$ números diferentes.
- Si $b = 8$ entonces $a \in \{2, 5, 8\} \Rightarrow 3$ números diferentes.

Así en total hay 16 números diferentes. La respuesta correcta es la opción c.

Analice el siguiente problema en el que se aplica la regla de divisibilidad por 11.

Problema 11

Si a y b son los dígitos de las unidades de millar y decenas, respectivamente, ¿cuántos posibles números de la forma $2a9b3$ son divisibles por 11?

- (a) 2
- (b) 4
- (c) 9
- (d) 10

Ítem 22. I Eliminatoria, I nivel 2015

Solución

Según las reglas de divisibilidad descritas, un número es divisible por 11 si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugares impares y la suma de las que ocupan lugares pares es divisible por 11.

En el número $2a9b3$ la suma de las cifras que ocupan lugares impares es $3 + 9 + 2 = 14$ y la suma de las que ocupan lugares pares es $b + a$.

La diferencia de la suma de las cifras que ocupan lugares impares y la suma de las que ocupan lugares pares es $14 - (a + b)$. Esta diferencia es múltiplo de 11 si y solo si $a + b = 14$ o $a + b = 3$. Recuerde que a y b solo puede tomar valores de 0 a 9 ya que corresponden a dos de los dígitos del número dado.

Para el caso en que $a + b = 14$, los posibles valores de a y b son:

- $a = 9, b = 5$.
- $a = 8, b = 6$.
- $a = 7, b = 7$.
- $a = 6, b = 8$.
- $a = 5, b = 9$.

Para el caso en que $a + b = 3$, los posibles valores de a y b son:

- $a = 0, b = 3.$
- $a = 1, b = 2.$
- $a = 2, b = 1.$
- $a = 3, b = 0.$

En total hay nueve posibles números de la forma $2a9b3$ que son divisibles por 11. Estos son: 29953, 28963, 27973, 26983, 25993, 20933, 21923, 22913 y 23903. Por lo tanto la respuesta correcta es la opción c.

8. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor.

8.1. Mínimo común múltiplo.

El mínimo común múltiplo de dos números es el menor de sus múltiplos comunes. Se acostumbra a denotar el mínimo común múltiplo de dos números a y b por m.c.m. (a,b). Una forma de calcular el mínimo común múltiplo de dos números consiste en elaborar una lista con los múltiplos de esos números hasta encontrar el primero que coincida. Por ejemplo, para determinar m.c.m.(120,300) se elabora una lista con algunos múltiplos de 120 y de 300.

Múltiplos de 120: 120, 240, 360, 480, 600, 720, 840,960, 1080, 1200, 1320 ...

Múltiplos de 300: 300, 600, 900, 1200, 1500, ...

Observe que en la lista de múltiplos hay dos comunes: 600 y 1200. No obstante el más pequeño de ellos es 600. Por lo tanto m.c.m.(120,300)=600.

Otro método para determinar el mínimo común múltiplo de dos o más números, por ejemplo m.c.m. (120,300), es la siguiente:

1. Se colocan los números uno al lado del otro sin importar el orden y a su derecha se traza una línea vertical.

120	300	
-----	-----	--

2. Se determina el menor divisor primo que tienen en común los números involucrados y se escribe en la parte superior del lado derecho de la línea vertical. Los cocientes respectivos se colocan debajo de cada número ubicado a la izquierda de la línea vertical.

$$\begin{array}{r|l} 120 & 300 \\ 60 & 150 \end{array} \quad 2$$

3. Se repite el paso 2 hasta que los cocientes no tengan divisores en común.

$$\begin{array}{r|l} 120 & 300 \\ 60 & 150 \\ 30 & 75 \\ 10 & 25 \\ 2 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{array}$$

4. El mínimo común múltiplo es el producto de los últimos cocientes que no tienen divisores en común y de los divisores primos ubicados a la derecha de la línea vertical.

Así $m.c.m.(120,300) = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 600$. Es decir, el menor múltiplo que tienen en común 120 y 300 es 600.

En el siguiente problema se emplea el concepto de mínimo común múltiplo.

Problema 12

En una tubería de gas de 6km de longitud se deben hacer agujeros cada 120m para conectar con tuberías secundarias y cada 300m para instalar válvulas de control. (En caso de coincidir se pueden instalar ambas en un mismo agujero). Si el primer agujero coincide al inicio de la tubería, ¿Cuántos hoyos se requieren en total?

- (a) 60
- (b) 61
- (c) 72
- (d) 600

Ítem 6. I Eliminatoria, I nivel 2014

Solución

Para resolver este problema se debe determinar cada cuánto coincide un agujero. Este número coincide con el menor de los múltiplos comunes de 120 y 300, es decir, con el mínimo común múltiplo. Verifique que $m.c.m.(120,300)=600$. Esto significa que cada 600m coincide un agujero. Como hay un hoyo al inicio de la tubería, coinciden un total de 11 hoyos ($6000 \div 600 + 1$). Es decir, en 11 hoyos se instala una tubería secundaria y una válvula de control.

Por otro lado se requieren 51 agujeros para las salidas secundarias ($6000 \div 120 + 1 = 51$) y 21 para las válvulas de control ($6000 \div 300 + 1 = 21$), es decir, 72 hoyos, de los cuales coinciden 11.

Por lo tanto se deben hacer un total de $72 - 11 = 61$ agujeros.

Un concepto similar al de mínimo común múltiplo es el de máximo común divisor.

8.2. Máximo común divisor

El máximo común divisor de dos números es el mayor de sus divisores comunes. Por lo general se denota por M.C.D. (a,b) al máximo común divisor de los números a y b .

Una forma de determinar el máximo común divisor de dos o más números es elaborar una lista con los divisores de los números. El mayor divisor común de la lista es el máximo común divisor. Para facilitar la búsqueda de divisores se pueden utilizar las reglas de divisibilidad. Para ejemplificar este procedimiento determinemos M.C.D.(36,28).

Si denotamos por D_a a los divisores de a entonces:

$$D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

$$D_{28} = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$$

Observe que el mayor de los divisores comunes de 36 y 28 es 4. Por lo tanto $M.C.D.(36,28)=4$.

Otro procedimiento para determinar el máximo común divisor de dos o más números es uno similar al presentado para el mínimo común múltiplo. A continuación se describe el procedimiento para determinar M.C.D.(36,28).

1. Se colocan los números uno al lado del otro sin importar el orden y a su derecha se traza una línea vertical.

$$\begin{array}{cc|c} 36 & 28 & \\ \hline \end{array}$$

2. Se determina el menor divisor primo que tienen en común los números involucrados y se escribe en la parte superior del lado derecho de la línea vertical. Los cocientes respectivos se colocan debajo de cada número ubicado a la izquierda de la línea vertical.

$$\begin{array}{cc|c} 36 & 28 & 2 \\ 18 & 14 & \\ \hline \end{array}$$

3. Se repite el paso 2 hasta que los cocientes no tengan divisores en común.

$$\begin{array}{cc|c} 36 & 28 & \\ 18 & 14 & 2 \\ 9 & 7 & \end{array}$$

4. El máximo común divisor es el producto de los divisores primos ubicados a la derecha de la línea vertical.

Así $M.C.D.(36,24) = 2 \cdot 2 = 4$. Esto es, el mayor número que divide a 36 y 24 a la vez es 4.

En el problema 8 debe determinar el máximo común divisor de tres números.

Problema 13

Se desea envasar 84ml, 252ml y 378ml de tres sustancias distintas en el menor número de frascos con la misma capacidad y sin mezclarlas. La cantidad total de frascos es

- (a) 12
- (b) 17
- (c) 42
- (d) 119

Ítem 13. I Eliminatoria, I nivel 2013

Solución

Debido a que se desea envasar tres cantidades distintas en el menor número de frascos, se debe determinar el máximo común divisor de esas cantidad. Este número será la capacidad de cada frasco.

Verifique que $M.C.D(84, 252, 378) = 42$. Es decir cada frasco contiene 42ml. Así la cantidad de frascos de 84ml, 252ml y 378ml es, respectivamente, 2 ($84 \div 42 = 2$), 6 ($252 \div 42 = 6$) y 9 ($378 \div 42 = 9$). Por lo tanto, la cantidad total de frascos es $2 + 6 + 9 = 17$. La respuesta correcta es la opción B.

9. Ejercicios sobre teoría de números.

A continuación se presenta una lista de ejercicios tomados de las eliminatorias 2008-2014 de la Olimpiada Costarricense de Matemática. Para resolverlos se deben emplear los conceptos estudiados en este documento.

1. La cantidad de números menores que 1000 que son divisibles por 3 o por 7 es

- (a) 47
- (b) 100
- (c) 428
- (d) 475

Ítem 23. I Eliminatoria, I nivel 2015

2. La cantidad de números que hay entre 100 y 300 (sin contarlos) que sean divisibles entre 3 y 5 son

- (a) 91
- (b) 92
- (c) 93
- (d) 94

Ítem 21. I Eliminatoria, I nivel 2014

3. Analice las siguiente proposiciones

- I. Si un número natural es un cuadrado perfecto entonces tiene exactamente 3 divisores.
- II. Si un número natural tiene exactamente tres divisores positivos entonces es un cuadrado perfecto.

De ellas son verdaderas:

- (a) Solamente la I
- (b) Solamente la II
- (c) I y II
- (d) Ninguna

Ítem 9. I Eliminatoria, nivel A 2012

4. Laura está leyendo un libro y nota que el número de página que está leyendo es divisible por 3, por 4 y por 5. La cifra de las unidades del número de la página es:

- (a) 0
- (b) 5
- (c) 6
- (d) 9

Ítem 5. I Eliminatoria, nivel A 2008

5. En un colegio hay 2013 estudiantes los cuales son puestos en una fila. A cada uno de estos estudiantes se le etiqueta del primero al último por medio del siguiente patrón: 1,2,3,4,5,4,3,2,1,2,3,4,5,4,3,2,1,... ¿Cuál es el número que le corresponde al estudiante que está en la posición 2013?

- (a) 2
- (b) 3
- (c) 4
- (d) 5

Ítem 16. I Eliminatoria, I nivel 2013

6. En la siguiente secuencia XYZ55XY5XYZ55XY5XYZ55XY5..., la letra o el número que se encuentra en la posición 2011 corresponde a

- (a) X
- (b) Y
- (c) Z
- (d) 5

Ítem 18. I Eliminatoria, nivel A 2011

7. ¿Cuántos números pares de tres cifras al ser divididos por 5, por 7 y por 3 dejan residuo 1?

- (a) 2
- (b) 3
- (c) 4
- (d) 5

Ítem 21. I Eliminatoria, nivel A 2012

8. La cantidad de números primos menores que 100 que tienen al 1 como dígito es

- (a) 7
- (b) 8
- (c) 9
- (d) 10

Ítem 7. I Eliminatoria, I nivel 2013

9. Si el sucesor del producto de dos números primos es un número primo entonces se puede asegurar con certeza que la suma de esos dos números primos es un número

- (a) par
- (b) primo
- (c) impar
- (d) compuesto

Ítem 12. I Eliminatoria, nivel A 2012

10. La cantidad de números primos menores que 100 cuyos dígitos suman 5 corresponde a
- (a) 2
 - (b) 3
 - (c) 5
 - (d) 6

Ítem 9. I Eliminatoria, nivel A 2011

11. La cantidad de ceros al final del número $15^8 \cdot 2^{10} \cdot 10^5$ corresponde a
- (a) 5
 - (b) 8
 - (c) 10
 - (d) 13

Ítem 21. I Eliminatoria, nivel A 2011

12. Si expresamos $n = 6^6 \cdot 5^5 \cdot 10^5$ en su forma extendida, entonces la suma de los dígitos de n es:
- (a) 16
 - (b) 17
 - (c) 18
 - (d) 19

Ítem 19. I Eliminatoria, nivel A 2008

13. Para que el número de la forma $421A$, en donde A es el dígito de las unidades, sea divisible por 6, el valor de A puede ser
- (a) 0
 - (b) 2
 - (c) 4
 - (d) 6

Ítem 9. I Eliminatoria, I nivel 2013

14. Cinco veces el producto de la edad de un padre y su hijo es 2915. ¿Cuántos años es mayor el padre que el hijo?
- (a) 18
 - (b) 26
 - (c) 42
 - (d) 53

Ítem 7. I Eliminatoria, I nivel 2015

15. Dado un número de la forma $759a8593$ y divisible por 11, el valor del dígito a corresponde a:

- (a) 0
- (b) 2
- (c) 7
- (d) 9

Ítem 19. I Eliminatoria, nivel A 2010

16. Un carpintero tiene un trozo de madera de $60\text{cm} \times 36\text{cm} \times 24\text{cm}$ y quiere cortarlo para obtener cubos del mayor tamaño posible sin desperdiciar nada de madera. ¿Cuántos cubos puede obtener?

- (a) 7
- (b) 12
- (c) 30
- (d) 360

Ítem 7. I Eliminatoria, I nivel 2014

17. Una fábrica de perfumes tiene 13 litros de perfume para envasar en frascos de 30ml , 40ml y 80ml , los cuales irán a lotes diferentes. Se requiere que la diferencia, en ml , entre cada lote sea la menor posible y que no sobre nada de perfume. Entonces la cantidad de frascos de 40ml que se envasa es

- (a) 40
- (b) 108
- (c) 109
- (d) 144

Ítem 8. I Eliminatoria, I nivel 2014

18. Tres grupos musicales dan conciertos cada 10 días, 6 días y 11 días, respectivamente. Si el día 28 de febrero del 2013 los tres dan un concierto, la cantidad de conciertos que darían en un periodo de 4 años comenzando en el año 2013 es

- (a) 4
- (b) 5
- (c) 6
- (d) 7

Ítem 15. I Eliminatoria, I nivel 2013

19. Tres líneas de autobuses que siguen rutas diferentes pasan por el centro comercial cada 12, 15 y 18 minutos. Si los tres estuvieron a las 2:00 p.m. en el centro comercial, ¿a qué hora se vuelven a encontrar nuevamente?

- (a) 3:00 pm
- (b) 5:00 pm
- (c) 7:00 pm
- (d) 9:00 pm

Ítem 4. I Eliminatoria, I nivel 2015

20. Se quiere cercar un terreno rectangular que mide 28 metros de ancho por 36 de largo. Para ello se colocan postes situados a la misma distancia uno del otro. Si en cada una de las esquinas del terreno se coloca un poste, entonces el número mínimo de postes que se deben colocar es

- (a) 8
- (b) 16
- (c) 32
- (d) 34

Ítem 5. I Eliminatoria, I nivel 2015

10. Solución a los ejercicios propuestos.

A continuación se presentan las soluciones de los ejercicios propuestos en la sección anterior.

1. Podemos calcular la cantidad de múltiplos de 3 o 7 menores que 1000, esto porque los múltiplos de 3 o 7 son divisibles precisamente por 3 o 7. La cantidad de números menores que 1000 que son múltiplos de 3 es el cociente de la división $1000 \div 3$, es decir 333. De igual forma la cantidad de números menores que 1000 que son múltiplos de 7 es el cociente de $1000 \div 7$ el cual 142. Por otra parte debemos calcular los múltiplos de 3 y 7 a la vez, es decir, los múltiplos de 21, pues si sumamos los múltiplos de 3 y 7 se consideran dos veces los que son múltiplos de ambos a la vez. Los múltiplos de 21 son el cociente de $1000 \div 21$ que es 47. Así en total hay $333 + 142 - 47 = 428$ números menores que 1000 que son divisibles por 3 y 7 a la vez. Opción correcta: c.
2. Entre 100 y 300 el menor y mayor múltiplo de 3 son 102 y 297, así la cantidad que hay entre ellos es $(297 - 102) \div 3 = 65$; es decir, $65 + 1 = 66$ múltiplos de 3 pues se incluyen los dos. De forma análoga hay $(295 - 102) \div 5 + 1 = 39$ múltiplos de 5. Pero hay que quitar los múltiplos comunes; es decir, los múltiplos de 15 que son $(285 - 105) \div 15 + 1 = 13$. Por lo tanto, hay $66 + 39 - 13 = 92$ múltiplos de 3 y 5 entre 100 y 300. Opción correcta: b.
3. I es falsa pues por ejemplo 36 es un cuadrado perfecto y tiene más de tres divisores. II es verdadera pues si un número tiene únicamente tres divisores, estos deben ser 1, el mismo número y otro factor que debe ser su raíz cuadrada, de lo contrario tendría un cuarto divisor. Opción correcta: b.
4. Note que $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. Con lo que se tiene que el número de la página es múltiplo de 60. Por lo tanto, la cifra de la unidades del número de la página debe ser 0. Opción correcta: a.
5. Esta es una sucesión de enteros que se va repitiendo de ocho en ocho términos. Tenemos entonces que dividir 2013 por 8 y encontrar el residuo. Se tiene entonces que, según el algoritmo de la división, $2013 = 251 \times 8 + 5$. Luego el 2013 será el quinto elemento de la sucesión 1,2,3,4,5,4,3,2, es decir el 5. Opción correcta: d.
6. Se puede apreciar que en la secuencia dada existe un periodo de ocho elementos, por lo que realizamos la división de 2011 entre 8, tenemos 251 como cociente y 3 de residuo. Así, la letra que se encuentra en la posición 2011 es Z. Opción correcta: c.
7. Si al dividir un número par por 5, por 7 y por 3 deja residuo 1, entonces su antecesor debe ser un múltiplo impar de 5, de 7 y de 3. Esto porque si n es el número entonces por el algoritmo de la división se cumple que $n = 5 \cdot p + 1$, $n = 7 \cdot q + 1$ y $n = 3 \cdot r + 1$. De donde $n - 1 = 5 \cdot p = 7 \cdot q = 3 \cdot r$. Como 3, 5 y 7 no tienen divisores en común entonces cualquier múltiplo común a ellos debe ser un múltiplo de $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

Entonces se busca un múltiplo impar de 105 que tenga únicamente 3 cifras. Ellos son: $105 \cdot 1 = 105$; $105 \cdot 3 = 315$; $105 \cdot 5 = 525$; $105 \cdot 7 = 735$; $105 \cdot 9 = 945$ y sus sucesores son: 106, 316, 526, 736 y 946. Opción correcta: d.

8. Los números menores que 100 que tienen al 1 como dígito son 1, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 31, 41, 61, 71, 81 y 91. De ellos son primos: 11, 13, 17, 19, 31, 41, 61 y 71. En total son 8 números. Opción correcta: b.

9. De los dos primeros números primos uno de ellos debe ser 2, de lo contrario ambos serían impares, su producto sería impar y el sucesor del producto sería par y por lo tanto compuesto (pues no puede ser 2). Entonces la suma de 2 más un número impar es impar. Opción correcta: c.

10. La lista de números menores que 100 cuya suma de dígitos es 5 corresponde a 5, 14, 23, 32, 41, 50. De ahí los números primos son 5, 23 y 41. Opción correcta: b.

11. Primero se descompone los números 15 y 10 en sus factores primos. Esto es $15 = 3 \cdot 5$ y $10 = 2 \cdot 5$. Luego aplicando propiedades de las potencias se obtiene:

$$15^8 \cdot 2^{10} \cdot 10^5 = (3 \cdot 5)^8 \cdot 2^{10} \cdot (2 \cdot 5)^5 = 3^8 \cdot 5^8 \cdot 2^{10} \cdot 2^5 \cdot 5^5 = 3^8 \cdot 2^2 \cdot 2^{13} \cdot 5^{13} = 3^8 \cdot 2^2 \cdot (2 \cdot 5)^{13} = 3^8 \cdot 2^2 \cdot 10^{13}. \text{ Dado que la potencia } 10^{13} \text{ contiene 13 ceros, entonces } 15^8 \cdot 2^{10} \cdot 10^5 \text{ tiene 13 ceros. Opción correcta: d.}$$

12. Observe que:

$$\begin{aligned} 6^6 \cdot 5^5 \cdot 10^5 &= 3^6 \cdot 2^6 \cdot 5^5 \cdot 10^5 \\ &= 3^6 \cdot 2 \cdot 2^5 \cdot 5^5 \cdot 10^5 \\ &= 3^6 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^5 \\ &= 1458 \cdot 10^{10} \end{aligned}$$

Con lo que la suma de los dígitos de n es $1 + 4 + 5 + 8 + 0 = 18$. Opción correcta: c.

13. Según las reglas de divisibilidad descritas, un número es divisible por 6 si es divisible por 2 y 3 a la vez. El número $421A$ es divisible por 2 si $A = 0, A = 2, A = 4, A = 6, A = 8$. De esta manera los números disponibles son 4210, 4212, 4214, 4216, 4218.

De los números anteriores solo 4212 y 4218 son divisibles por 3. De esta forma $A = 2$ o $A = 8$. Opción correcta: b.

14. Al descomponer 2915 como el producto de números primos se obtiene $2915 = 5 \cdot 11 \cdot 53$. Por el teorema fundamental de la aritmética la descomposición descrita es única. Dado que cinco veces el producto de la edad del hijo y del padre es 2915 se tiene que la edad del hijo es 11 años y la del padre 53. Por lo tanto el padre es $53 - 11 = 42$ años mayor

que el hijo. Respuesta correcta: opción c.

15. Según las reglas de divisibilidad, un número es divisible por 11 si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar impar y la suma de las que ocupan lugar par es divisible por 11.
En el número $759a8593$ la suma de las cifras que ocupan lugares impares es $5 + a + 5 + 3 = 13 + a$ y la suma de las que ocupan lugares pares es $7 + 9 + 8 + 9 = 33$.
La diferencia de la suma de las cifras que ocupan lugares impares y la suma de las que ocupan lugares pares es $a + 13 - 33 = a - 20$ la cual es múltiplo de 11 si y solo si $a = 9$.
Recuerde que a solo puede tomar valores de 0 a 9 ya que es una cifra del número. Opción correcta: d.
16. El máximo común divisor de 60, 36, 24 es 12. Por lo tanto, hay $(60 \div 12) \cdot (36 \div 12) \cdot (24 \div 12) = 30$ cubos de 12cm de lado. Opción correcta: b.
17. $M.C.M.(30,40,80)=240$. Si se envasan 8 frascos de 30ml , 6 de 40ml y 3 de 80ml se tiene 720ml repartidos en igual cantidad en cada lote (240ml en cada uno). Ahora, $13\text{l} = 13000\text{ml}$ y $13000 = 720 \cdot 18 + 40$, es decir, si se repite el procedimiento 18 veces se tiene la misma cantidad de ml en cada lote y sobran 40ml , que se envasan en un frasco adicional. Por lo tanto se envasan $6 \cdot 18 + 1 = 109$ frascos de 40ml . Opción correcta: c.
18. El mínimo común múltiplo de 10, 6 y 11 es 330 por lo que si comenzamos en febrero del 2013, los conciertos siguientes serían aproximadamente en enero del 2014, diciembre del 2014, noviembre del 2015 y octubre del 2016. Por lo tanto, ofrecerían en total 5 conciertos. Opción correcta: b.
19. Se debe determinar cada cuánto se encuentran los buses en el centro comercial. Para esto se calcula el mínimo común múltiplo de 12, 15 y 18, el cual es 180. Esto quiere decir que pasan por el centro comercial cada 3 horas. Si los tres estuvieron a las 2:00 pm entonces se vuelven a encontrar nuevamente a las 5:00 pm. opción correcta: b.
20. Para determinar la distancia en que se deben ubicar los postes calculamos el máximo común divisor de 28 y 36 el cual es 4. Por lo tanto en cada lado del terreno que mide 36 metros hay que colocar 8 postes (sin contar los dos de las esquinas) y en cada lado que mide 28 hay que colocar 6 (sin contar los dos de las esquinas). En total hay que colocar $2 \cdot 8 + 2 \cdot 6 + 4 = 32$ postes. Opción correcta: c.

11. Créditos

Este documento es un material de apoyo sobre Teoría de Números para estudiantes que participan en el primer nivel de la primera eliminatoria de la Olimpiada Costarricense de Matemática.

Autor

Jonathan Espinoza González.

Editor

Jonathan Espinoza González.

Revisor

Christhian Zamora Jaén.

Para referenciar este documento

Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas (2015). *Material de apoyo sobre Teoría de Números: I nivel, I Eliminatoria*. San José, Costa Rica: autor.