OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

UNA - UCR - TEC - UNED - MEP - MICIT

Álgebra

$$e^{i\pi} + \phi - \frac{1}{\phi} = 0$$

II Nivel
I Eliminatoria

Marzo 2016

1 Presentación.

El presente material pretende ser de ayuda para quien requiere prepararse en los conceptos básicos de álgebra con miras a la I eliminatoria de la Olimpiada Costarricense de Matemática (OLCOMA). A continuación se presentan los temas correspondientes, así como algunos ejemplos y ejercicios, además se **sugieren algunos vídeos o paginas web** que le permiten aclarar o profundizar en dichos temas.

2 Contenidos de Álgebra

Estos son los contenidos que se evalúan en el tema de álgebra para el II nivel de la I Eliminatoria de la Olimpiada Costarricense de Matemática.

- Expresiones algebraicas: Valor numérico de una expresión algebraica. Polinomios. Fórmulas notables $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ y $(a+b)(a-b)$.
- Factorización: factor común, inspección, fórmula general, las fórmulas notables.
- Simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias. Racionalización.
- Ecuaciones e inecuaciones de primer grado. Sistemas de ecuaciones lineales.

Tema 1

Expresiones algebraicas: Valor numérico de una expresión algebraica. Polinomios. Fórmulas notables $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ y $(a+b)(a-b)$.

- **Expresiones algebraicas.**
  Se puede decir que una expresión algebraica[1] es una expresión que contiene números, letras (denominadas variables o incógnitas) y signos de operaciones. Por ejemplo, en la escuela se aprendió que el perímetro de un rectángulo es $P = 2a + 2l$, esta fórmula es un ejemplo una expresión algebraica. Como podrá imaginar existen muchas situaciones donde se usan expresiones algebraicas para representar algún fenómeno. Veamos algunos ejemplos:

  a) Para establecer la equivalencia entre la **masa** y la **energía** en la teoría de la relatividad de Einstein, se tiene la expresión algebraica $E = mc^2$, donde E representa la energia, m la masa y c la velocidad de la luz, $c \approx 300\,000\,000$ metros por segundo.
  b) Para relacionar temperaturas en grados Fahrenheit con temperaturas en grados Celsius se utiliza la expresión algebraica $F = \dfrac{9C}{5} + 32$, donde F representa la temperatura en grados Fahrenheit, y C los grados Celsius.

[1] Expresiones algebraicas ver https://www.youtube.com/watch?v=7RzjAXLhpiA

Si por ejemplo, tenemos una temperatura en grados Celsius de $C = 20°$, para encontrar su correspondiente temperatura en grados Fahrenheit se sustituye dicho valor de $C = 20°$ en la expresión:

$$\begin{aligned} F &= \frac{9C}{5} + 32 \\ &= \frac{9 \cdot 20}{5} + 32 \\ F &= 68 \end{aligned}$$

Con ello se obtiene el **valor numérico**[2] **de F, cuando $C = 20°$.**

- **Valor numérico de una expresión algebraica.**
Como vimos en el ejemplo anterior, para determinar el valor numérico de una expresión algebraica, simplemente se sustituyen las variables (letras) por los valores dados. Veamos algunos ejemplos, que se han presentado en eliminatorias anteriores sobre este tema.

Problemas Resueltos

1. Si $a = 2$ y $b = 3$, la expresión $\dfrac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{\frac{b}{a} + \frac{1}{ab}} - 1$ es equivalente a:

   a) $\dfrac{23}{10}$

   b) $\dfrac{1}{2}$

   c) $\dfrac{3}{10}$

   d) $\dfrac{-3}{2}$

   Ítem 2, I Eliminatoria 2012, A Nivel

   Solución: En este ejercicio, se sustituyen tanto $a = 2$ como $b = 3$ en la expresión algebraica, para determinar su valor numérico:

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{\frac{b}{a} + \frac{1}{ab}} - 1 = \frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3}} - 1$$

   Posteriormente se resuelven las operaciones con fracciones y se simplifica:

$$\frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3}} - 1 = \frac{\frac{13}{6}}{\frac{5}{3}} - 1 = \frac{13}{10} - 1 = \frac{3}{10}$$

[2] Valor numérico https://www.youtube.com/watch?v=lotgl-F6lS0

2. Sean x, y números reales tales que $x + y = 2(x - y)$. Entonces, el valor numérico de la expresión $\dfrac{x^3 + x^2y - y^3}{xy^2}$ es

   a) $\dfrac{35}{3}$

   b) $\dfrac{29}{3}$

   c) $\dfrac{29}{2}$

   d) $\dfrac{35}{2}$

Ítem 24, I Eliminatoria 2011, B Nivel

Solución: En este ejercicio, no se nos da un valor especifico para x y y, sino que se tiene que $x + y = 2(x - y)$, simplificando esta ultima expresión:

$$x + y = 2(x - y)$$

$$x + y = 2x - 2y$$

$$3y = x$$

Por otro lado, si se observa la expresión que tenemos que calcular y la separamos en tres fracciones, que se pueden simplificar:

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + x^2y - y^3}{xy^2} &= \frac{x^3}{xy^2} + \frac{x^2y}{xy^2} - \frac{y^3}{xy^2} \\ &= \frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y} - \frac{y}{x} \end{aligned}$$

Ahora, sustituyendo $x = 3y$ en esta ultima expresión obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y} - \frac{y}{x} &= \frac{(3y)^2}{y^2} + \frac{3y}{y} - \frac{y}{3y} \\ &= \frac{9y^2}{y^2} + \frac{3y}{y} - \frac{y}{3y} \\ &= 9 + 3 - \frac{1}{3} = \frac{35}{3} \end{aligned}$$

3. Si $\dfrac{m}{n} = \dfrac{7}{3}$ y $\dfrac{r}{s} = \dfrac{6}{5}$ el valor numérico de $\dfrac{10mr + 11ns}{ns - 5mr}$ es

   a) 3

   b) -3

   c) 1

   d) -1

   Solución: Generalmente cuando se busca el valor numérico de una expresión algebraica, se tiene concretamente valor de las incógnitas. En este caso no es así, pero si observamos la expresión vemos que hay que pensar en mr o en ns.

$$\frac{10mr + 11ns}{ns - 5mr}$$

   Para relacionar, por ejemplo m y r hay que multiplicar las fracciones $\dfrac{m}{n} = \dfrac{7}{3}$ y $\dfrac{r}{s} = \dfrac{6}{5}$

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s} &= \frac{7}{3} \cdot \frac{6}{5} \\ \frac{mr}{ns} &= \frac{42}{15} = \frac{14}{5} \\ mr &= = \frac{14}{5} ns \end{aligned}$$

   Finalmente sustituyendo $mr = \dfrac{14}{5} ns$ en la expresión

$$\frac{10mr + 11ns}{ns - 5mr} =$$

$$\frac{10 \cdot \frac{14}{5} ns + 11ns}{ns - 5 \cdot \frac{14}{5} ns} =$$

$$\frac{28ns + 11ns}{ns - 14ns} =$$

$$\frac{39ns}{-13ns} = -3$$

4. Si $m = \sqrt[n]{4^{2-n}}$ el valor numérico de $(4m)^{\frac{3n}{2}}$ corresponde a

   a) 2
   b) 4
   c) 16
   d) 64

Ítem 1, I Eliminatoria 2015, II Nivel

Solución: Se procede a sustituir el valor de m en la expresión $(4m)^{\frac{3n}{2}}$, se obtiene como resultado:

$$\begin{aligned} (4m)^{\frac{3n}{2}} &= \left(4\sqrt[n]{4^{2-n}}\right)^{\frac{3n}{2}} \\ &= \left(4^n \cdot 4^{2-n}\right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \left(4^2\right)^{\frac{3}{2}} \\ &= 64 \end{aligned}$$

- **Polinomios**

Podemos decir que **los monomios** son expresiones algebraicas de un solo término, donde los exponentes de las variables son números naturales. Por ejemplo, las siguientes tres expresiones 4, $3x^2$ y $\dfrac{2xy^3}{5}$ corresponde, cada uno a monomio. Por otra parte un **polinomio**[3] es una suma (o resta) algebraica de monomios de distinto grado. Por ejemplos a continuación tenemos dos polinomios que los llamamos respectivamente $P(x)$ y $Q(x)$.

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x^4 - 5x^2 + 3x + 8 \\ Q(x) &= 8x^3 + 2x^2 - 5x \end{aligned}$$

Ahora, bien para suma o restar polinomios, basta buscar los términos semejantes, es decir que tengan el mismo factor literal (misma letra con el mismo exponente). Por ejemplo:

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (3x^4 - 5x^2 + 3x + 8) + (8x^3 + 2x^2 - 5x) \\ &= 3x^4 - 5x^2 + 3x + 8 + 8x^3 + 2x^2 - 5x \\ &= 3x^4 + 8x^3 + (-5x^2 + 2x^2) + (3x - 5x) + 8 \\ &= 3x^4 + 8x^3 - 3x^2 - 2x + 8 \end{aligned}$$

Para restar se procede de forma similar; únicamente hay que tener presente que cambiamos el signo del segundo polinomio

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= (3x^4 - 5x^2 + 3x + 8) - (8x^3 + 2x^2 - 5x) \\ &= 3x^4 - 5x^2 + 3x + 8 - 8x^3 - 2x^2 + 5x \\ &= 3x^4 - 8x^3 + (-5x^2 - 2x^2) + (3x + 5x) + 8 \\ &= 3x^4 + 8x^3 - 7x^2 + 8x + 8 \end{aligned}$$

[3] Ver http://www.mcgraw-hill.es/bcv/guide/capitulo/8448165888.pdf

Para multiplicar un monomio por un polinomio, se multiplicar el monomio por cada término del polinomio, por ejemplo:

$$2x^2y(5x^2 - 4xy + 6) = 10x^4y - 8x^3y^2 + 12x^2y$$

Para multiplicar dos polinomios, se multiplica cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio:

$$\begin{aligned}
(2x^2 - 3x)(5x^2 - 4x + 2) &= 2x^2(5x^2 - 4x + 2) - 3x(5x^2 - 4x + 2) \\
&= 10x^4 - 8x^3 + 4x^2 - 15x^3 + 12x^2 - 6x \\
&= 10x^4 + (-8x^3 - 15x^3) + (4x^2 + 12x^2) - 6x \\
&= 10x^4 - 23x^3 + 16x^2 - 6x
\end{aligned}$$

- **Fórmulas notables**
  Existen multiplicaciones entre binomios que se pueden expresar de forma sencilla sin necesidad de operar por el procedimiento habitual. Estas multiplicaciones se denominan fórmulas notables. El cuadrado de una suma $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$ es la multiplicación de dos binomios, y su resultado multiplicando término a término es:

$$\begin{aligned}
(a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\
&= a^2 + ab + ba + b^2 \\
&= a^2 + 2ab + b^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Del mismo modo podemos deducir las otras fórmulas notables, en resumen tenemos:

Fórmulas notables

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
4. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Veamos, con algunos ejemplos, cómo se usan dichas fórmulas:

$$\begin{aligned}
(3x + 5y)^2 &= (\ \ )^2 + 2(\ \ )(\ \ ) + (\ \ )^2 && \textit{Primera fórmula} \\
&= (3x)^2 + 2(3x)(5y) + (5y)^2 \\
&= 9x^2 + 30xy + 25y^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4x - 2y)^3 &= (\ \ )^3 - 3(\ \ )^2(\ \ ) + 3(\ \ )(\ \ )^2 - (\ \ )^3 && \textit{Quinta fórmula} \\
&= (4x)^3 - 3(4x)^2(2y) + 3(4x)(2y)^2 - (2y)^3 \\
&= 64x^3 - 3(16x^2)(2y) + 3(4x)(4y^2) - 8y^3 \\
&= 64x^3 - 96x^2y + 48xy^2 - 8y^3
\end{aligned}$$

Problemas Resueltos

1. Al desarrollar la expresión $(a+b)^2(a-b)^2$ y simplificarla a máximo, el número de términos que tendrá dicho desarrollo corresponde a:

   a) 2

   b) 3

   c) 6

   d) 9 *Ítem 3, I Eliminatoria 2013, II Nivel*

   Solución: Podemos hacer el ejercicio de una manera larga desarrollamos cada fórmula notable:

$$\begin{aligned}(a+b)^2(a-b)^2 &= \left(a^2+2ab+b^2\right)\left(a^2-2ab+b^2\right) && \textit{primera y segunda fórmula notable}\\ &= a^4-2a^3b+a^2b^2+2a^3b-4a^2b^2+2ab^3+a^2b^2-2ab^3+b^4 && \textit{multiplicación}\\ &= a^4-2a^2b^2+b^4 && \textit{simplificando términos semejantes}\end{aligned}$$

   La otra alternativa es ver la tercera fórmula notable

$$\begin{aligned}(a+b)^2(a-b)^2 &= [(a+b)(a-b)]^2 && \textit{el 2 es exponente común}\\ &= \left[a^2-b^2\right]^2 && \textit{tercera fórmula notable}\\ &= a^4-2a^2b^2+b^4 && \textit{segunda fórmula notable}\end{aligned}$$

   Por tanto se concluye que la expresion desarrollada tiene 3 términos.

2. Una expresión equivalente a $\left[\dfrac{\sqrt{(3x+4y)(4y-3x)+9x^2}}{2y}\right]^3$ con $x>0$ y $y>0$ corresponde a:

   a) 3

   b) 6

   c) 8

   d) 9 *Ítem 2, I Eliminatoria 2014, II Nivel*

   Solución: Para empezar hay que notar, que dentro de la raíz, hay una fórmula notable.

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\sqrt{(3x+4y)(4y-3x)+9x^2}}{2y}\right]^3 &= \left[\frac{\sqrt{(4y+3x)(4y-3x)+9x^2}}{2y}\right]^3 \\
&= \left[\frac{\sqrt{16y^2-9x^2+9x^2}}{2y}\right]^3 \qquad \textit{simplifique términos} \\
&= \left[\frac{\sqrt{16y^2}}{2y}\right]^3 \qquad \textit{extraer raíz } \sqrt{16y^2} = 4y > 0 \\
&= \left[\frac{4y}{2y}\right]^3 = [2]^3 = 8
\end{aligned}$$

3. Considere el polinomio $P(x) = (x + a)^2 - (x + b)^2$ donde a y b son dos números reales distintos. Si k es un número real tal que $P(k) + P(-a) = 0$ entonces el valor de k es

   a) $-b$

   b) b

   c) $\dfrac{a-b}{2}$

   d) $\dfrac{a+b}{2}$

Ítem 10*, I Eliminatoria 2012, B Nivel*

Solución: Observe que necesitamos calcular $P(k)+P(-a)=0$, vamos a iniciar calculando $P(k)$, entonces sustituyendo x por k en la expresión $P(x)=(x+a)^2-(x+b)^2$, tenemos:

$$\begin{aligned}
P(x) &= (x+a)^2-(x+b)^2 && \textit{sustituir } x \textit{ por } k\\
P(k) &= (k+a)^2-(k+b)^2 && \textit{aplicar fórmulas notables}\\
&= k^2+2ak+a^2-\left(k^2+2bk+b^2\right) && \textit{resta de polinomios}\\
&= k^2+2ak+a^2-k^2-2bk-b^2\\
&= 2ak+a^2-2bk-b^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{P(k)=2ak+a^2-2bk-b^2}$$

Del mismo modo procedemos con $P(-a)$

$$\begin{aligned}
P(x) &= (x+a)^2-(x+b)^2 && \textit{sustituir } x \textit{ por } -a\\
P(-a) &= (-a+a)^2-(-a+b)^2\\
&= (0)^2-(b-a)^2\\
&= 0-\left(b^2-2ab+a^2\right)\\
&= -b^2+2ab-a^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{P(-a)=-b^2+2ab-a^2}$$

Finalmente usando el hecho de que $P(k)+P(-a)=0$:

$$\begin{aligned}
P(k)+P(-a) &= \left(2ak+a^2-2bk-b^2\right)+\left(-b^2+2ab-a^2\right)\\
&= 2ak+-2kb-2b^2+2ab=0
\end{aligned}$$

Ahora vamos despejar la variable k (el estudiante puede ver el apartado de factorización y ecuaciones de este mismo documento).

$$\begin{aligned}
2ak+-2kb-2b^2+2ab &= 0 && \textit{agrupe las expresiones con } k\\
2ak+-2kb &= 2b^2-2ab && \textit{sacando } k \textit{ como factor común}\\
k(2a-2b) &= 2b^2-2ab\\
k &= \frac{2b^2-2ab}{2a-2b} && \textit{factorizando}\\
k &= \frac{-2b(-b+a)}{2(a-b)}=\frac{-2b(a-b)}{2(a-b)} && \textit{simplificando}\\
k &= -b
\end{aligned}$$

Tema 2

Factorización: factor común, inspección, fórmula general, las fórmulas notables.

Así como los números enteros enteros pueden ser expresados como producto de dos o más números (factores primos), por ejemplo $12 = 2^2 \cdot 3$, los polinomios (cuando son factorizables) pueden ser expresadas como el producto de dos o más factores algebraicos, es decir al proceso de expresar un polinomio como un producto de factores se le denomina **factorización**. A continuación se exponen los métodos de factorización más usados:

1. **Factor común** : Se busca que tiene en común cada término del polinomio

$$\begin{aligned} 1)2x^4 + 4x^2 &= 2x^2x^2 + 2 \cdot 2x^2 && \textit{tiene en común } 2x^2 \\ &= 2x^2(x^2+2) && \textit{se extrae } 2x^2 \textit{ y se deja como multiplicación} \end{aligned}$$

$$2)16x^4y^2 + 20x^2y^6 = 4x^2y^2(4x^2+5y^4) \qquad \textit{tiene en común } 4x^2y^2$$

2. En algunas expresiones que se desean factorizar son útiles las fórmula notables:

   (a) $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ primer fórmula notable.
   (b) $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ segunda fórmula notable.
   (c) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ tercera fórmula notable (diferencia de cuadrados).
   (d) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ diferencia de cubos.
   (e) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$ suma de cubos.

Problemas Resueltos

(a) El resultado de simplificar la expresión $\dfrac{(x-y)^2 - a^a}{x^2-(y+a)^2}$ corresponde a:

a) $\dfrac{a}{2y}$

b) $\dfrac{-a}{2y}$

c) $\dfrac{x+y-a}{x-y+a}$

d) $\dfrac{x-y+a}{x+y+a}$

Ítem 23, I Eliminatoria 2012, B Nivel

Solución: Vamos a factorizar tanto el numerador como el denominador usando la tercera fórmula notable.

$$\begin{aligned} \frac{(x-y)^2 - a^2}{x^2-(y+a)^2} &= \frac{[(x-y)+a]\,[(x-y)-a]}{[x+(y+a)]\,[x-(y+a)]} \quad \textit{eliminar paréntesis} \\ &= \frac{[x-y+a]\,[x-y-a]}{[x+y+a]\,[x-y-a]} \quad \textit{simplificar términos iguales} \\ &= \frac{[x-y+a]}{[x+y+a]} \end{aligned}$$

(b) si $x + y = 16$ y $x^3 + y^3 = 1072$ entonces el valor de $x^2 + y^2$ es

a) 63

b) 67

c) 130

d) 256

Solución: Note que la parte izquierda de $x^3 + y^3 = 1072$ se puede factorizar usando la fórmula que llamamos suma de cubos, es decir:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= 1072 \\ (x+y)(x^2 - xy + y^2) &= 1072 \end{aligned}$$

Además como $x + y = 16$ se tiene que

$$\begin{aligned} 16 \cdot (x^2 - xy + y^2) &= 1072 \\ \boxed{x^2 - xy + y^2} &= \boxed{67} \end{aligned}$$

Por otra parte, elevando al cuadrado cada extremo de $x + y = 16$ y utilizando las fórmulas notables se obtiene

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= 16^2 \\ \boxed{x^2 + 2xy + y^2} &= \boxed{256} \end{aligned}$$

Si restamos estas dos ecuaciones obtenidas

$$\begin{aligned} (x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - xy + y^2) &= 256 - 67 \\ 3xy &= 189 \\ xy &= \boxed{63} \end{aligned}$$

Por tanto, sustituyendo el valor de xy

$$\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 &= \boxed{67} \\ x^2 - 63 + y^2 &= 67 \\ x^2 + y^2 &= 130 \end{aligned}$$

(c) Un factor de la factorización de $-27y^4 - 75z^4$ corresponde a:

a) $3y^2 + 5z^2$

b) $(3y^2 - 5z^2)^2$

c) $9y^2 + 25z^2$

d) $3y^2 + \sqrt{30}yz + 5z^2$ *Ítem 21, I Eliminatoria 2011, B Nivel*

Solución: Vamos a factorizar primeramente por factor común:

$$-27y^4 - 75z^4 = -3(9y^4 + 25z^4)$$

Ahora bien, concentremos la atención en la expresión $9y^4 + 25z^4$, vamos a completar la segunda fórmula notable, el truco es sumar y restar lo que necesitamos, y lo que necesitamos es $30y^2z^2$ como lo veremos más adelante.

$$\begin{aligned}
9y^4 + 25z^4 &= 9y^4 + 30y^2z^2 + 25z^4 - 30y^2z^2 \\
&= (3y^2)^2 + \overbrace{2(3y^2)(5z^2)}^{30y^2z^2} + (5z^2)^2 - 30y^2z^2 \\
&= \left(3y^2 + 5z^2\right)^2 - 30y^2z^2 \\
&= \left(3y^2 + 5z^2\right)^2 - \left(\sqrt{30}yz\right)^2 \quad \textit{usando la tercera fórmula notable} \\
&= \left(3y^2 + 5z^2 + \sqrt{30}yz\right)\left(3y^2 + 5z^2 - \sqrt{30}yz\right)
\end{aligned}$$

Volviendo al problema original

$$\begin{aligned}
-27y^4 - 75z^4 &= -3(9y^4 + 25z^4) \\
&= -3\left(3y^2 + 5z^2 + \sqrt{30}yz\right)\left(3y^2 + 5z^2 - \sqrt{30}yz\right)
\end{aligned}$$

(d) Un valor equivalente a $x = \sqrt{7 - \sqrt{40}}$ corresponde a

a) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$

b) $\sqrt{\dfrac{7\sqrt{10} + 20}{\sqrt{10}}}$

c) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

d) $\sqrt{2} - \sqrt{5}$ *Ítem 12, I Eliminatoria 2011, A Nivel*

Solución: Observe que para simplificar la raíz, se debe factorizar de el subradical $7-\sqrt{40}$.

$$\begin{aligned} 7-\sqrt{40} &= 7-\sqrt{2^2\cdot 5\cdot 2} \\ &= 7-\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2} \\ &= 7-2\sqrt{5}\cdot\sqrt{2} \end{aligned}$$

Ahora, por conveniencia separamos el número 7 en 5 y 2.

$$\begin{aligned} 7-\sqrt{40} &= 7-2\sqrt{5}\cdot\sqrt{2} \\ &= \boxed{5}-2\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+\boxed{2} \\ &= (\sqrt{5})^2-2\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2 \\ &= \left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Por tanto la la expresión

$$\sqrt{7-\sqrt{40}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2}=\left|\sqrt{5}-\sqrt{2}\right|=\sqrt{5}-\sqrt{2}$$

Las barras del valor absoluto significa que debo garantizar que lo que "sale de la raíz" (de índice par) debe ser positivo. Pero como $\sqrt{5}$ es mayor que $\sqrt{2}$ la resta es positiva y podemos eliminar el valor absoluto sin problemas.

Tema 3

Simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias. Racionalización.

1. Al racionalizar el denominador de $\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$ y simplificar se obtiene una expresión cuyo denominador es

   a) $x+3$

   b) $x-1$

   c) 1

   d) 3

Ítem 6, I Eliminatoria 2011, II Nivel

Solución: Para racionalizar el denominador de una fracción, se multiplica el numerador y el denominador por una expresión conveniente, de tal forma que se complete la tercera fórmula notable :

$$
\begin{aligned}
\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} &= \underbrace{\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}\cdot\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}}_{\textit{completar la tercera fórmula notable}}\\
&= \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-2^2}\\
&= \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x+3-4}\\
&= \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}=\sqrt{x+3}+2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto el denominador de la nueva fracción es 1

2. Encuentre el resultado de la siguiente suma:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

a) 7

b) 8

c) 9

d) 10 *Ítem 16, I Eliminatoria 2008, B Nivel*

Solución: Vamos a racionalizar cada una de las fracciones:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} &= \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{\sqrt{1}-\sqrt{2}}\\
&= \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{(\sqrt{1})^2-(\sqrt{2})^2}\\
&= \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{1-2}=\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{-1}\\
&= -\sqrt{1}+\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} &= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\\
&= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}\\
&= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1}\\
&= -\sqrt{2}+\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Así sucesivamente, hasta la ultima

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} &= \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}\cdot\frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{\sqrt{99}-\sqrt{100}}\\
&= \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{(\sqrt{99})^2-(\sqrt{100})^2}\\
&= \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{99-100}=\frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{-1}\\
&= -\sqrt{99}+\sqrt{100}
\end{aligned}$$

Ahora, sustituyendo en la suma original:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

$$(-\sqrt{1}+\sqrt{2})+(-\sqrt{2}+\sqrt{3})+(-\sqrt{3}+\sqrt{4})+\cdots+(-\sqrt{99}+\sqrt{100})$$

Como podemos observar las raíces consecutivamente se cancelan, únicamente quedando la primera y la ultima.

$$-\sqrt{1}+\sqrt{100}$$

$$-1+10=9$$

3. La expresión $\dfrac{2x^2-8}{1-\sqrt{x-1}}$ es equivalente a

   (a) $(x+4)(1+\sqrt{x-1})$

   (b) $(x-4)(1-\sqrt{x-1})$

   (c) $2(x-2)(1-\sqrt{x-1})$

   (d) $-2(x+2)(1+\sqrt{x-1})$ *Ítem 6, I Eliminatoria 2015, II Nivel*

Solución: Se procede a racionalizar el denominador de la fracción:

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2-8}{1-\sqrt{x-1}} &= \frac{2x^2-8}{1-\sqrt{x-1}}\cdot\frac{1+\sqrt{x-1}}{1+\sqrt{x-1}}\\
&= \frac{2(x^2-4)(1+\sqrt{x-1})}{1-(x-1)}\\
&= \frac{2(x-2)(x+2)(1+\sqrt{x-1})}{2-x}\\
&= -2(x+2)(1+\sqrt{x-1})
\end{aligned}$$

Tema 4

Ecuaciones e inecuaciones de primer grado. Sistemas de ecuaciones lineales

1. La suma de cinco números naturales consecutivos es 2010. El resultado que se obtiene al sumar todos los dígitos de esos cinco números es el siguiente

   a) 25

   b) 30

   c) 35

   d) 40 *Ítem 11, I Eliminatoria 2010, A Nivel*

   Solución: Como los números son consecutivos (que siguen el uno al otro) podemos representarlos como x, $x+1$, $x+2$, $x+3$, y $x+4$, entonces según las condiciones del problema tenemos:

$$\begin{aligned}
x+x+1+x+2+x+3+x+4 &= 2010 && \textit{sumando la los términos semejantes}\\
5x+10 &= 2010 && \textit{el } 10 \textit{ que suma lo paso a restar}\\
5x &= 2010-10 &&\\
5x &= 2000 && \textit{el } 5 \textit{ que multiplica lo paso a dividir}\\
x &= \frac{2000}{5} = 400 &&
\end{aligned}$$

   Ahora, los números que buscamos son: 400, 401, 402, 403 y 404 cuyos dígitos suman 30

2. Don Genaro tiene una mula. Un día alguien le preguntó por la edad del animal. A lo que él contestó : "En cuatro años sería tres veces de lo que era hace cuatro años. Determine la edad actual de la mula de Don Genaro".

   a) 2 años

   b) 4 años

   c) 6 años

   d) 8 años *Ítem 22, I Eliminatoria 2010, A Nivel*

Solución: Representemos con x la edad actual de la mula, entonces se tiene que:
En cuatro años: se representa como $x + 4$.
Hace cuatro años: se representa como $x - 4$.
Tres veces de lo que era hace cuatro años: se representa como $3(x - 4)$. Entonces

$$\begin{aligned}
x + 4 &= 3(x - 4) \\
x + 4 &= 3x - 12 && \textit{agrupemos } x \textit{ a la izquierda y los números a la derecha} \\
x - 3x &= -12 - 4 \\
-2x &= -16 \\
x &= \frac{-16}{-2} = 8 && \textit{la edad actual de la mula}
\end{aligned}$$

3. Si $m = \dfrac{abc}{a-b}$ entonces despejar b en términos del resto de las variables.

   a) $\dfrac{a}{m + ac}$

   b) $\dfrac{am}{m - ac}$

   c) $\dfrac{am}{m + ac}$

   d) $\dfrac{m}{m - ac}$

Ítem 9, II Eliminatoria 2003, A Nivel

Solución: Como el objetivo es despejar la incógnita b, hay que, de alguna forma agruparlas:

$$\begin{aligned}
m &= \frac{abc}{a-b} && \textit{como } a - b \textit{ divide, lo paso a multiplicar} \\
m(a - b) &= abc && \textit{haciendo la multiplicación} \\
am - bm &= abc && \textit{agrupando las expresiones que tiene } b \\
-bm - abc &= -am && \textit{multiplicando por } -1 \textit{ ambos lados} \\
bm + abc &= am && \textit{factorizando el lado izquierdo, por factor común} \\
b(m + ac) &= am \\
b &= \frac{am}{m + ac}
\end{aligned}$$

4. En un edificio de apartamentos viven 105 personas; de ellas, el número de parejas casadas es la tercera parte del número de hombres solteros y el número de mujeres solteras es el doble del número de hombres casados. El número total de hombres que viven en el edificio es

   a) 15

   b) 30

   c) 45

   d) 60

Ítem 15, II Eliminatoria 2015, II Nivel

Solución: Sea x el número de parejas casadas, observe que:

Género	Casados	Solteros
Hombres	x	$3x$
Mujeres	x	$2x$

Entonces $x + x + 3x + 2x = 105$, de donde $x = 15$

Genero	Casados	Solteros
Hombres	$x = 15$	$3x = 45$
Mujeres	$x = 15$	$2x = 30$

Por tanto hay 60 hombres

5. La solución de la inecuación $-5 \leq \dfrac{-4-3x}{2} < 10$ es:

   a) $-8 < x \leq 2$

   b) $-8 \leq x < 2$

   c) $2 < x \leq 8$

   d) $2 \leq x < 8$ *Ítem 19, I Eliminatoria 2014, II Nivel*

Solución: Si observamos la expresión se nota que en realidad hay dos inecuaciones que se pueden resolver simultáneamente, pero por comodidad las vamos a separar en:

$$-5 \leq \frac{-4-3x}{2} \qquad y \qquad \frac{-4-3x}{2} < 10$$

$$\begin{array}{rcll}
-5 & \leq & \dfrac{-4-3x}{2} & \textit{como 2 divide, lo paso a multiplicar} \\
-10 & \leq & -4-3x & \textit{agrupamos los números} \\
-10+4 & \leq & -3x & \\
-6 & \leq & -3x & -3 \textit{ es negativo, al dividir cambia la desigualdad} \\
\dfrac{-6}{-3} & \geq & x & \\
2 & \geq & x & \textit{que es equivalente a } x \leq 2
\end{array}$$

Del mismo modo realizamos la otra inecuación

$$\begin{array}{rcll}
\dfrac{-4-3x}{2} & < & 10 & \\
-4-3x & < & 20 & \\
-3x & < & 24 & -3 \textit{ es negativo, al dividir cambia la desigualdad} \\
x & > & \dfrac{-24}{3} & \\
x & > & -8 & \textit{que es equivalente a } -8 < x
\end{array}$$

Por lo tanto la solución es $-8 < x \leq 2$ o bien $]-8, 2]$

6. En un zoológico hay jirafas y avestruces. Si en total se contabilizan 30 ojos y 44 patas, ¿cuántas avestruces hay?

   a) 7

   b) 8

   c) 9

   d) 10

Ítem 18, *I Eliminatoria 2010, A Nivel*

Solución: El problema se puede resolver con un sistema de ecuaciones. Para ello llamemos:
Número de jirafas: x
Número de avestruces: y, entonces
Cantidad de ojos: $2x + 2y = 30$, hay 30 ojos en total y cada animal tiene claramente 2.
Cantidad de patas: $4x + 2y = 44$, hay 44 patas, cuatro de jirafas, dos de avestruces.

$$\begin{cases} 2x + 2y &= 30 \\ 4x + 2y &= 44 \end{cases}$$

Hay varios métodos[4] para resolver sistemas ecuaciones, pero vamos a usar un método conocido como sustitución. La idea es despejar una incógnita de alguna de las ecuaciones (normalmente la más simple), en este caso escogemos despejar y de la primera ecuación.

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 30 \\ 2y &= 30 - 2x \\ y &= \frac{30 - 2x}{2} \\ y &= 15 - x \end{aligned}$$

Ahora, sustituimos $y = 15 - x$ en la segunda ecuación

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 44 \\ 4x + 2(15 - x) &= 44 \\ 4x + 30 - 2x &= 44 \\ 2x &= 14 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo $x = 7$, en $y = 15 - x$ se tiene que $y = 15 - 7 = 8$, lo que significa que hay 7 jirafas y 8 avestruces.

[4] Ver http://www.math.com.mx/docs/sec/sec_0014_Sistemas_Lineales.pdf

Tema 5

Ecuaciones de segundo grado.

En una ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$. Las soluciones están dadas por:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Vamos a deducir esta fórmula para obtener las soluciones de la ecuación cuadrática, basado en el método de factorización que se conoce como completar cuadrados.
Considere la ecuación $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$.

Como $a\neq 0$ podemos dividir ambos lados de la ecuación por a, para obtener

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

Queremos con los dos primeros términos de la parte izquierda completar la primera fórmula notable.

$$\begin{aligned} x^2+\frac{b}{a}x\ +\frac{c}{a} &= 0\\ (\ x\ )^2+2(\ x\ )(\ \frac{b}{2a}\ )+\frac{c}{a} &= 0 \end{aligned}$$

Para completar la fórmula notable debemos sumar $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, y para no alterar la igualdad se suma a ambos lados.

$$\begin{aligned} (\ x\ )^2+2(\ x\ )(\ \frac{b}{2a}\ )+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a} &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2\\ (\ x\ )^2+2(\ x\ )(\ \frac{b}{2a}\ )+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a} \end{aligned}$$

Ahora bien, la parte izquierda corresponde a la fórmula notable y en la parte derecha se desarrolla la potencia.

$$\begin{aligned} \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\\ \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a^2} \end{aligned}$$

Haciendo $\Delta=b^2-4ac$, conocido como el discriminante[1] en el análisis de las ecuaciones cuadráticas, la ecuación queda así:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$$

Ahora, sacando raíz cuadrada

$$\begin{aligned} x+\frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \\ x+\frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x &= -\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

1. La suma de las raíces de la ecuación $x(x-6)+4=2$ corresponde a:

   a) 0

   b) 2

   c) 4

   d) 6

Ítem 7, I Eliminatoria 2011, B Nivel

Solución: Simplificando la ecuación de $x(x-6)+4=2$ obtenemos

$$x(x-6)+4=2$$

$$x^2-6x+4=2$$

$$x^2-6x+2=0$$

Que corresponde a una ecuación cuadrática, para resolverla vamos a llamar:

- a al coeficiente (número) de x^2 en este caso $a=1$.
- b al coeficiente (número) de $-6x$ en este caso $b=-6$.
- c al término independiente (número) en este caso $c=2$.

Ahora, calculamos lo que llamaremos el **discriminante** que se representa con la letra Δ y corresponde a $\Delta=b^2-4ac$.

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2-4ac \qquad \textit{sustituyendo los valores de } a,\ b \textit{ y } c \\ \Delta &= (-6)^2-4\cdot 1\cdot 2 \qquad \textit{sustituyendo los valores de } a,\ b \textit{ y } c \\ \Delta &= 28 \end{aligned}$$

Finalmente, las soluciones de la ecuación cuadrática están dadas por la fórmula

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \textit{sustituyendo los valores de } a,\ b,\ c \textit{ y } \Delta \\
x &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{28}}{2 \cdot 1} \\
x &= \frac{6 \pm 2\sqrt{7}}{2} \\
x &= 3 \pm \sqrt{7}
\end{aligned}
$$

El $\pm$ significa que hay dos soluciones (raíces): $x = 3 + \sqrt{7}$ y $x = 3 - \sqrt{7}$.
Finalmente si sumamos las soluciones se tiene:

$$3 + \sqrt{7} + 3 - \sqrt{7} = 6.$$

3 Ejercicios propuestos

1. Andrea entra en un negocio con el dinero justo para comprar un confite para cada uno de sus compañeros de clase, al precio de 13 colones cada uno. Se encuentra con que el precio de los confites bajo a 10 colones cada uno, por lo que compra 6 confites más de lo previsto, gastando todo el dinero que tenía ¿Cuántos compañeros de clase tiene Andrea?

   a) 18

   b) 20

   c) 21

   d) 23 *Ítem 1, I Eliminatoria 2008, B Nivel*

2. El producto de las edades de Mario y Eric es 510, además, Mario es 13 años mayor que Eric. Determine la edad de Eric.

   a) 15 años

   b) 17 años

   c) 30 años

   d) 34 años *Ítem 20, I Eliminatoria 2010, A Nivel*

3. En una jaula donde hay conejos y palomas, pueden contarse 35 cabezas y 94 patas. Entonces, la diferencia entre el números de palomas y conejos es:

   a) 5

   b) 7

   c) 11

   d) 12 *Ítem 1, I Eliminatoria 2011, B Nivel*

4. Oscar tiene el doble de hermanos que hermanas y su hermana Ana tiene cinco veces más hermanos que hermanas. Entonces, la cantidad total de hermanos que hay en la familia es:

   a) 3

   b) 4

   c) 6

   d) 7 *Ítem 3, I Eliminatoria 2011, B Nivel*

5. El recíproco de la suma de los recíprocos de dos números es $\frac{14}{3}$. Si la suma de los números es 21 entonces su producto es igual a

   a) $\frac{9}{2}$

   b) $\frac{2}{9}$

   c) $\frac{1}{98}$

   d) 98 *Ítem 1, I Eliminatoria 2012, B Nivel*

6. El resultado de racionalizar el denominador de la expresión $\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ corresponde a

   a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$

   b) $\sqrt{x}-\sqrt{y}$

   c) $\frac{x(1+2\sqrt{y})+y(1-2\sqrt{y})}{x-y}$

   d) $\frac{x+y-2(x\sqrt{y}+y\sqrt{x})}{x-y}$ *Ítem 6, I Eliminatoria 2012, B Nivel*

7. Si $P(x)$ es un polinomio tal que -3 y 5 son dos de sus ceros, entonces, con certeza se puede asegurar que un factor del polinomio $Q(x) = P(x) + (x^2 - 9)(x + 5)$ es

   a) $x + 5$

   b) $x - 3$

   c) $x - 5$

   d) $x + 3$ *Ítem 7, I Eliminatoria 2012, B Nivel*

8. Sean a y b números reales distintos tales que $2a^2 + 2b^2 = 5ab$. Determine los posibles valores de $\dfrac{a+b}{a-b}$

   a) 1

   b) 2

   c) 3

   d) 4 *Ítem 22, I Eliminatoria 2012, B Nivel*

9. Sean a, b, c números enteros positivos tales que $ab = 12$, $bc = 20$ y $ac = 15$. Entonces, el valor de abc es

   a) 40

   b) 17

   c) 30

   d) 34 *Ítem 8, I Eliminatoria 2013, II Nivel*

10. Sean a, b y c números reales tales que $a+b-c=1$, entonces la solución de la ecuación $3x(a+b)=3(x+2)(c-1)$es

   a) $c-\dfrac{1}{3}$

   b) $c-6$

   c) $2(c-1)$

   d) $c-1$ *Ítem 9, I Eliminatoria 2013, II Nivel*

11. La expresión $\dfrac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{2a\sqrt{b}-2b\sqrt{a}}{a-b}$ es equivalente a

   a) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$
   b) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$
   c) $a+b$
   d) $a-b$ *Ítem 10, I Eliminatoria 2015, II Nivel*

12. Al efectuar $\dfrac{\left(\dfrac{4a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)^{-1}}{\left(\dfrac{4a}{b}-4+\dfrac{b}{a}\right)^{-1}}$ se obtiene como resultado

   a) 1
   b) -1
   c) $\dfrac{2a-b}{2a+b}$
   d) $\dfrac{2a+b}{2a-b}$ *Ítem 13, I Eliminatoria 2015, II Nivel*

13. Si la suma de dos números es 2 y su producto es -2, entonces la suma de los cuadrados de dichos números corresponde a

   a) 2
   b) 4
   c) 8
   d) 10 *Ítem 21, I Eliminatoria 2015, II Nivel*

14. Sean a, b, c, d y e números naturales consecutivos cuya suma es un cubo perfecto y $b+c+d$ es cuadrado perfecto. La suma de las cifras del menor c es

   a) 17
   b) 18
   c) 19
   d) 20

Ítem 22, I Eliminatoria 2015, II Nivel

4 Solución a los ejercicios propuestos

1. Andrea entra en un negocio con el dinero justo para comprar un confite para cada uno de sus compañeros de clase, al precio de 13 colones cada uno. Se encuentra con que el precio de los confites bajo a 10 colones cada uno, por lo que compra 6 confites más de lo previsto, gastando todo el dinero que tenía ¿Cuántos compañeros de clase tiene Andrea?

   Solución: Indicando con x el número de compañeros de Andrea, el monto que Andrea pretendía gastar eran $13x$ colones, mientras que la suma que efectivamente gasto fue de $10x$ colones. La diferencia entre estas cifras corresponde exactamente al costo de los 6 confites, ósea 60 colones.

   Por lo tanto, x lo podemos encontrar resolviendo la siguiente ecuación:

   $$13x - 10x = 60$$

   por lo que $x = 20$.

2. El producto de las edades de Mario y Eric es 510, además, Mario es 13 años mayor que Eric. Determine la edad de Eric.

   Solución: El problema se puede resolver con un sistema de ecuaciones pero, se resolverá de manera diferente. Sean m y $m - 13$ las edades de Mario y Erick respectivamente. Como

   $$m(m - 13) = 510$$

   y el número $510 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 = 30 \cdot 17$

   Dado que la diferencia entre 30 y 17 es 13, claramente Mario tiene 30 años y Eric 17.

3. En una jaula donde hay conejos y palomas, pueden contarse 35 cabezas y 94 patas. Entonces, la diferencia entre el números de palomas y conejos es:

   Solución: Llamaremos x al número de conejos y y la cantidad de palomas. Entonces

   $$x + y = 35$$

   $$4x + 2y = 94$$

   Despejando y de la primera ecuación se tiene que $y = 35 - x$ y sustituyéndola en la segunda ecuación:

   $$4x + 2(35 - x) = 94$$

   $$4x + 70 - 2x) = 94$$

   $$2x = 24$$

   $$x = 12$$

   Así $x = 12$, y sustituyendo se obtiene que $y = 23$. Por lo tanto, la diferencia es 11.

4. Oscar tiene el doble de hermanos que hermanas y su hermana Ana tiene cinco veces más hermanos que hermanas. Entonces, la cantidad total de hermanos que hay en la familia es:

Solución: Sea x la cantidad de hermanos y y la cantidad de hermanas. Como Oscar tiene el doble de hermanos que hermanas

$$\begin{aligned} x-1 &= 2y \qquad \textit{sin incluir a Oscar} \\ x &= 2y+1 \end{aligned}$$

Por otra parte, como Ana tiene cinco veces más hermanos que hermanas entonces

$$x = 5(y-1)$$

Igualando ambas expresiones se obtiene:

$$\begin{aligned} 2y+1 &= 5y-5 \\ y &= 2 \qquad \textit{y por consiguiente } x = 5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, son 7 hermanos en total.

5. El recíproco de la suma de los recíprocos de dos números es $\dfrac{14}{3}$. Si la suma de los números es 21 entonces su producto es igual a

   Solución: Si los números se representan por x e y entonces sus recíprocos son: $\dfrac{1}{x}$ y $\dfrac{1}{y}$.

$$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{x+y}{xy}} = \frac{xy}{x+y} = \frac{14}{3}$$

   Pero como suma $x+y$ es 21

$$\frac{xy}{x+y} = \frac{xy}{21} = \frac{14}{3}$$

   Se tiene que $xy = 98$

6. El resultado de racionalizar el denominador de la expresión $\dfrac{x+y-2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ corresponde a

   Solución: En lugar de racionalizar como normalmente se hace, vamos a factorizar

$$\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x})^2-2\sqrt{xy}+(\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \sqrt{x}-\sqrt{y}$$

7. Si $P(x)$ es un polinomio tal que -3 y 5 son dos de sus ceros, entonces, con certeza se puede asegurar que un factor del polinomio $Q(x) = P(x) + (x^2-9)(x+5)$ es

   Solución: Como $P(x)$ es un polinomio tal que -3 y 5 son dos de sus ceros, entonces se puede escribir de la forma:

$$P(x) = (x+3)(x-5)R(x) \qquad \textit{Para algún polinomio } R(x)$$

Por tanto como $Q(x) = P(x) + (x^2 - 9)(x + 5)$ sustituyendo $P(x)$

$$Q(x) = (x + 3)(x - 5)R(x) + (x^2 - 9)(x + 5)$$
$$Q(x) = (x + 3)(x - 5)R(x) + (x + 3)(x - 3)(x + 5)$$
$$Q(x) = (x + 3)\left[(x - 5)R(x) + (x - 3)(x + 5)\right]$$

Entonces $(x + 3)$ es un factor de $Q(x)$

8. Sean a y b números reales distintos tales que $2a^2 + 2b^2 = 5ab$. Determine los posibles valores de $\dfrac{a+b}{a-b}$

   Solución: Como $2a^2 + 2b^2 = 5ab$ tenemos:

$$\begin{aligned} 2a^2 + 2b^2 &= 5ab \\ 2a^2 - 5ab + 2b^2 &= 0 \\ (2a - b)(a - 2b) &= 0 \end{aligned}$$

   Lo que significa que $2a - b = 0$ o $a - 2b = 0$:

   Si $2a - b = 0$ implica que $b = 2a$ y la expresión $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{a+2a}{a-2a} = \dfrac{3a}{-a} = -3$.

   Si $a - 2b = 0$ implica que $a = 2b$ y la expresión $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{2b+b}{2b-b} = \dfrac{3a}{b} = 3$.
   Por tanto la expresión tiene 2 posibles valores.

9. Sean a, b, c números enteros positivos tales que $ab = 12$, $bc = 20$ y $ac = 15$. Entonces, el valor de abc es

   Solución: Considere el producto

$$ab \cdot bc \cdot ac = 12 \cdot 20 \cdot 15 = 3600$$
$$a^2b^2c^2 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$
$$abc = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

10. Sean a, b y c números reales tales que $a + b - c = 1$, entonces la solución de la ecuación $3x(a + b) = 3(x + 2)(c - 1)$es

    Solución: Note que :

$$\begin{aligned} 3x(a+b) &= 3(x+2)(c-1) && \textit{cancelar el } 3 \\ x(a+b) &= (x+2)(c-1) \\ ax + bx &= cx - x + 2c - 2 \\ ax + bx - cx &= -x + 2c - 2 \\ x(a+b-c) &= -x + 2c - 2 && \textit{como } a+b-c=1 \\ x \cdot 1 &= -x + 2c - 2 \\ 2x &= 2c - 2 \\ x &= c - 1 \end{aligned}$$

11. La expresión $\dfrac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \dfrac{2a\sqrt{b}-2b\sqrt{a}}{a-b}$ es equivalente a

Solución: Se racionaliza el denominador de la primera fracción y luego se procede a sumar fracciones homogéneas

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{2a\sqrt{b}-2b\sqrt{a}}{a-b} &= \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{2a\sqrt{b}-2b\sqrt{a}}{a-b} \\
&= \frac{a\sqrt{a}-a\sqrt{b}+b\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b} + \frac{2a\sqrt{b}-2b\sqrt{a}}{a-b} \\
&= \frac{a\sqrt{a}+a\sqrt{b}-b\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b} \\
&= \frac{a(\sqrt{a}+\sqrt{b})-b(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b} \\
&= \frac{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b} = \sqrt{a}+\sqrt{b}
\end{aligned}$$

12. Al efectuar $\dfrac{\left(\dfrac{4a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)^{-1}}{\left(\dfrac{4a}{b}-4+\dfrac{b}{a}\right)^{-1}}$ se obtiene como resultado

Solución: Para resolver el problema, se aplica una propiedad de potencia, suma o resta de expresiones algebraicas fraccionarias y una fórmula notable:

$$\begin{aligned}
\frac{\left(\dfrac{4a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)^{-1}}{\left(\dfrac{4a}{b}-4+\dfrac{b}{a}\right)^{-1}} &= \frac{\dfrac{4a}{b}-4+\dfrac{b}{a}}{\dfrac{4a}{b}-\dfrac{b}{a}} \\
&= \frac{\dfrac{4a^2-4ab+b^2}{ab}}{\dfrac{4a^2-b^2}{ab}} \\
&= \frac{(2a-b)^2}{(2a-b)(2a+b)} \\
&= \frac{2a-b}{2a+b}
\end{aligned}$$

13. Si la suma de dos números es 2 y su producto es -2, entonces la suma de los cuadrados de dichos números corresponde a

a) 2

b) 4

c) 8

d) 10 *Ítem 21, I Eliminatoria 2015, II Nivel*

Solución: Sean x, y según las condiciones del problema, es decir $x + y = 2$, $xy = -2$. Entonces,

$$\begin{aligned} x + y = 2 \ &\Rightarrow \ (x+y)^2 = 4 \\ &\Rightarrow \ x^2 + 2xy + y^2 = 4 \\ &\Rightarrow \ x^2 + 2(-2) + y^2 = 4 \\ &\Rightarrow \ x^2 + y^2 = 8 \end{aligned}$$

14. Sean a, b, c, d y e números naturales consecutivos cuya suma es un cubo perfecto y $b + c + d$ es cuadrado perfecto. La suma de las cifras del menor c es

a) 17

b) 18

c) 19

d) 20 *Ítem 22, I Eliminatoria 2015, II Nivel*

Solución: Sean $c-1, c-2, c, c+1, c+2$ los cinco números naturales consecutivos. Entonces
$c - 1 + c - 2 + c + c + 1 + c + 2 = m^3$ con m entero $\Rightarrow 5c = m^3$
$c - 1 + c + c + 1 = n^2$ con n entero $\Rightarrow 3c = n^2$
Así, para que se cumpla, la descomposición canónica de c es $3^\alpha 5^\beta$ y el menor valor de c se obtiene cuando $\alpha = 3$ y $\beta = 2$. Por lo tanto, $c = 3^3 \cdot 5^2 = 675$ y la suma de sus cifras es 18.

5 Créditos

Este documento es un material de apoyo sobre Álgebra para estudiantes que participan en el segundo nivel de la primera eliminatoria de la Olimpiada Costarricense de Matemática.

Autor

Marvin Abarca Fuentes.

Editor

Marvin Abarca Fuentes.

Revisor

Salomón Hernández Chaves.

Para referenciar este documento

Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas (2016). *Material de apoyo sobre Álgebra: II nivel, I Eliminatoria.* San José, Costa Rica: autor.