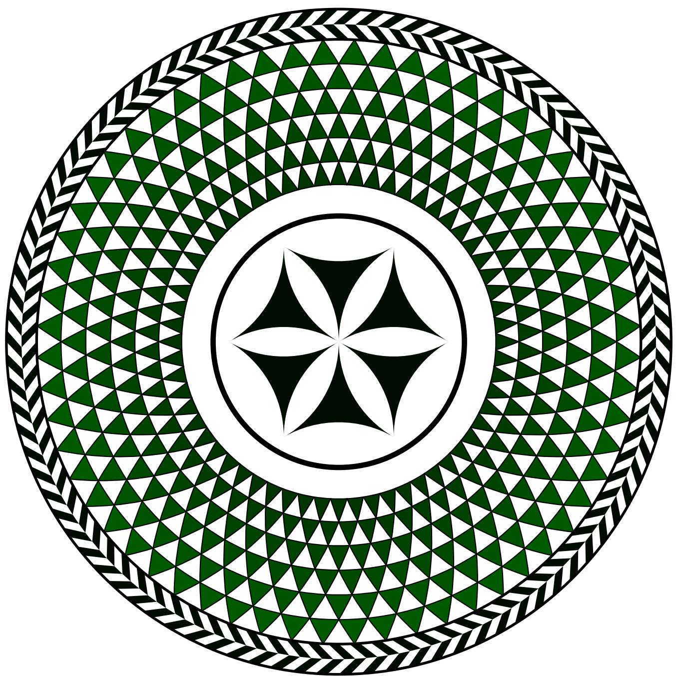
OLIMPIADAS COSTARRICENSES DE MATEMÁTICAS

UNA - UCR - TEC - UNED - MEP - MICIT

Geometría



II Nivel

I Eliminatoria

Mayo, 2016

Contenido

1 II Nivel (8° y 9°) - Geometría

1.1 Presentación

Este material presenta ejercicios que fueron tomados de pruebas de primeras eliminatorias aplicadas del 2003 al 2015.

El objetivo principal del material es que los estudiantes de segundo nivel -estudiantes de octavo y noveno años, tengan un acercamiento al tipo de problemas que son propuestos en pruebas de primeras eliminatorias.

En el material se indica el temario que está considerado para este nivel. Es importante resaltar que no son desarrollados los contenidos que ahí se describen, sino que se consideran problemas que contemplen algunos de los contenidos propios de este nivel.

Antes de cada uno de los ejercicios que se plantean y resuelven, son enunciandos los teoremas y las definiciones más relevantes que se necesitan para dicho ejercicio (teoremas y definiciones propios del segundo nivel para primeras eliminatorias).

Es importante que se estudie primero el material que ha sido preparado para el primer nivel, pues muchos de los conceptos que se necesitan en los siguientes ejercicios han sido desarrollados ahí.

1.2 Temario de I eliminatoria 2015

Contenidos a considerar

1. Conceptos geométricos básicos y su notación: punto, recta, plano.
2. Puntos colineales y no colineales. Puntos coplanares y puntos no coplanares.
3. Segmentos de recta, semirrectas, rayos y semiplanos.
4. Rectas paralelas, perpendiculares y concurrentes. Planos paralelos y perpendiculares.
5. Figuras tridimensionales. Caras, aristas y vértices.
6. Clasificación de ángulos por su medida. Clasificación de ángulos por su posición (adyacentes y consecutivos).
7. Relaciones de medida entre los ángulos (congruencia, complementarios y suplementarios). Ángulos determinados por dos rectas y una transversal: alternos externos, alternos internos, correspondientes y conjugados.
8. Desigualdad triangular.
9. Teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo y cuadrilátero convexo. Teorema de la medida del ángulo externo de un triángulo.
10. Teorema de la suma de las medidas de los ángulos externos de un triángulo y cuadrilátero convexo.
11. Clasificación de triángulos de acuerdo con la medida de sus ángulos internos o la medida de sus lados.
12. Ejes cartesianos. Representación de puntos y figuras.
13. Área y perímetro de triángulos, cuadriláteros y círculo.
14. Rectas notables en un triángulo. Propiedades de las rectas notables en un triángulo.
15. Congruencia de triángulos.
16. Teorema de Pitágoras.
17. Proporcionalidad.

1.3 Problemas resueltos

Teorema 1.1 (Teorema de Pitágoras) *En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos.*

Ejercicio 1.1 Primera eliminatoria - segundo nivel - 2013 - ítem 1

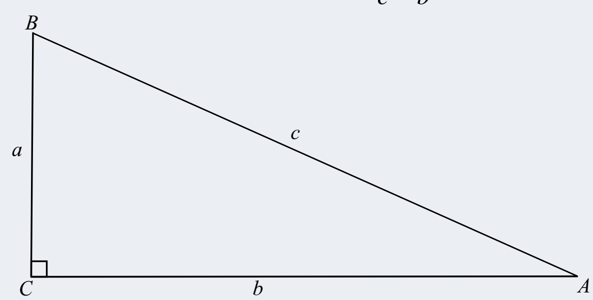
Según los datos de la figura adjunta una expresión equivalente a $\dfrac{a^2}{c-b}$ es

A) $a+b$

B) $b+c$

C) $c-b$

D) $a-b$



Solución

De acuerdo con el teorema de Pitágoras, teorema 1.1, se tiene que

$$\begin{aligned} & c^2 = a^2 + b^2 \\ \Rightarrow\ & c^2 - b^2 = a^2 \\ \Rightarrow\ & (c+b)(c-b) = a^2 \\ \Rightarrow\ & c+b = \frac{a^2}{c-b} \end{aligned}$$

De esta manera, $\dfrac{a^2}{c-b}$ es equivalente a la expresión $c+b$. Respuesta correcta: opción B.

Ejercicio 1.2 Primera eliminatoria - segundo nivel - 2015 - ítem 12

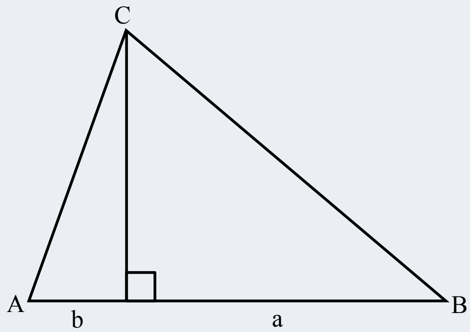
En la figura adjunta $AB = x$, $AC = x - 1$ y $BC = x + 1$, con certeza $a - b$ es

A) 1

B) 2

C) 4

D) 5



Solución

Con base en el teorema de Pitágoras (teorema 1.1),

$$\begin{aligned} & (x+1)^2 - a^2 = (x-1)^2 - b^2 \\ \Rightarrow \quad & x^2 + 2x + 1 - a^2 = x^2 - 2x + 1 - b^2 \\ \Rightarrow \quad & 4x = a^2 - b^2 \\ \Rightarrow \quad & 4x = (a-b)(a+b) \end{aligned}$$

Luego, dado que $AB = x = a + b$, se concluye que $4 = a - b$.

Respuesta correcta: opción C.

Teorema 1.2 (Área de un triángulo) *Si h es la altura correspondiente al lado $\overline{AB}$ de algún triángulo, su área está dada por $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot h$.*

Teorema 1.3 (Paralela media) *El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y mide la mitad de la longitud del tercer lado.*

Ejercicio 1.3 Primera eliminatoria - segundo nivel - 2013 - ítem 2

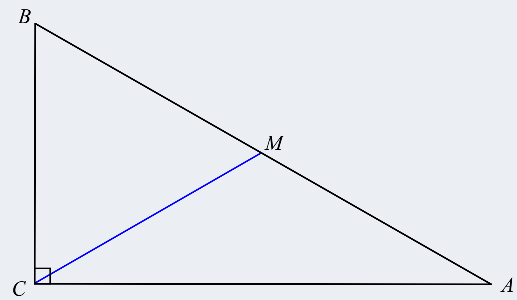
En la figura adjunta, el ΔABC es rectángulo en C y M es el punto medio de $\overline{AB}$. ¿Qué porcentaje del área del ΔABC es el área del ΔAMC?

A) menos del 50%

B) igual al 50%

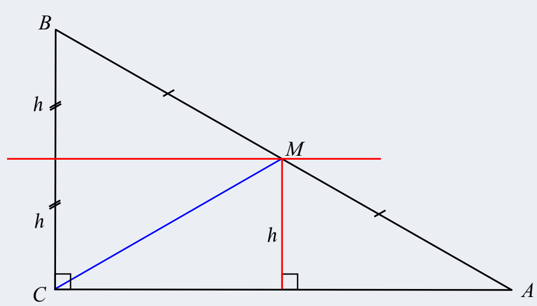
C) más del 50%

D) no se puede determinar



Solución

Basados en el teorema 1.3, al trazar la paralela media del ΔABC con respecto al lado $\overline{AC}$, esta contiene el punto medio de $\overline{AB}$ (que es M) y el punto medio de $\overline{BC}$.



Si h es la medida de la altura del ΔAMC, de acuerdo con el teorema 1.2 se tiene que el área del $\Delta ABC = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot 2h = AC \cdot h$ y el área del $\Delta AMC = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot h$.

Por lo tanto, el área del ΔAMC es 50% del área del ΔABC. Respuesta correcta: opción B.

Ejercicio 1.4 Primera eliminatoria - segundo nivel - 2015 - ítem 24

Sea el ΔABC tal que D es el punto medio de $\overline{AB}$, E es el punto medio de $\overline{DB}$ y F es el punto medio de $\overline{BC}$. Si el área del ΔABC es 72 cm^2, entonces el área en cm^2 del ΔAEF es

A) 18

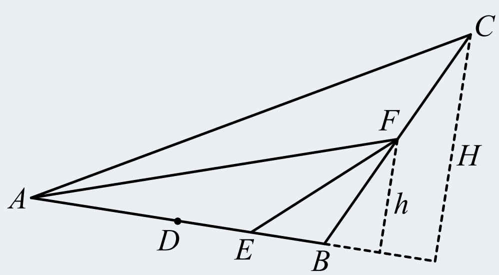
B) 24

C) 27

D) 36

Solución

Dado que F es el punto medio de $\overline{BC}$, la altura h del ΔAEF de F a $\overline{AE}$ es la mitad de la altura H del ΔABC de C a $\overline{AB}$ (lo anterior basados en el teorema 1.3 aplicado en el triángulo rectángulo de hipotenusa $\overline{BC}$).



La base $\overline{AE}$ del ΔAEF mide $\frac{3}{4} \cdot AB$, pues D es el punto medio de $\overline{AB}$ y E es el punto medio de $\overline{DB}$; así, basados en el teorema 1.2,

$$\begin{aligned}
\text{Área del } \Delta AEF &= \frac{1}{2} \cdot AE \cdot h \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} \cdot AB\right)\left(\frac{1}{2} \cdot H\right) \\
&= \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2} \cdot AB \cdot H\right) \\
&= \frac{3}{8} \cdot 72 = 27
\end{aligned}$$

Respuesta correcta: opción C.

Ejercicio 1.5 Primera eliminatoria - segundo nivel - 2015 - ítem 25

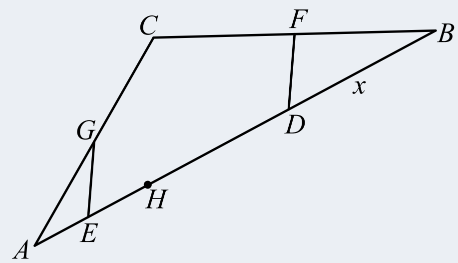
Considere el ΔABC de la figura adjunta, donde F es el punto medio de $\overline{CB}$, G es el punto medio de $\overline{AC}$, H es un punto cualquiera de $\overline{AB}$ con E y D tales que $AE = EH$ y $HD = DB$. Si h representa la medida en centímetros de la altura del ΔABC sobre el lado $\overline{AB}$ y $AB = 20$ cm, el área, en centímetros cuadrados del ΔAEG, es

A) $h(10-x)$

B) $\dfrac{h}{2}(10-x)$

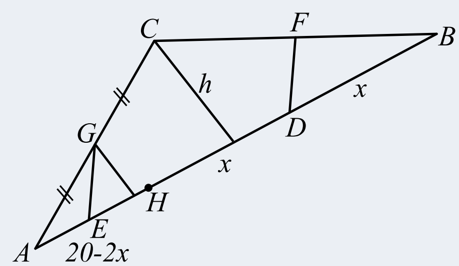
C) $\dfrac{h}{4}(10-x)$

D) $\dfrac{h}{8}(10-x)$



Solución

Considere las alturas de los triángulos ΔABC y ΔAEG sobre las bases respectivas $\overline{AB}$ y $\overline{AE}$. Como G es el punto medio de $\overline{AC}$, la altura de medida h_1 del ΔAEG es la mitad de la medida de la altura h del ΔABC (lo anterior basados en el teorema 1.3).



Dado que $DB = x = HD$ y $AB = 20$ cm, se tiene que $AH = AB - HD - DB = 20 - 2x$, por lo que la base $\overline{AE}$ del ΔAEG mide $\dfrac{1}{2}(20-2x) = 10 - x$.

Luego, el área del $\Delta AEG = \dfrac{1}{2} \cdot AE \cdot h_1 = \dfrac{1}{2} \cdot (10-x) \cdot \dfrac{h}{2} = \dfrac{h}{4}(10-x)$.

Respuesta correcta: opción C.

Definición 1.1 (Triángulos semejantes) *Dos triángulos se llaman triángulos semejantes si sus ángulos correspondientes tienen la misma medida.*

Teorema 1.4 (Teorema de Thales) *Dos triángulos son semejantes si, y solo si, sus lados correspondientes son proporcionales.*

Teorema 1.5 (Ángulos entre paralelas y transversal) *Si dos rectas son paralelas, cualquier transversal a ellas tiene ángulos alternos iguales, ángulos correspondientes iguales y ángulos internos al mismo lado de la transversal suplementarios.*

Definición 1.2 (Ángulos opuestos por el vértice) *Sean $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ dos rectas que se cortan en O, tales que valen $A-O-B$ y $C-O-D$. Se dice que $\angle AOC$ y $\angle BOD$ son ángulos opuestos por el vértice.*

Teorema 1.6 (Ángulos internos de un triángulo) *La suma de las medidas de los ángulos internos de todo triángulo es igual a $180°$.*

Ejercicio 1.6 Primera eliminatoria - segundo nivel - 2013 - ítem 7

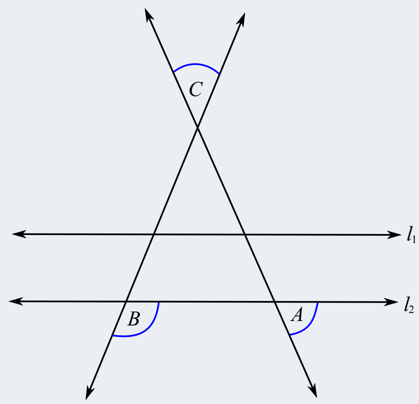
En la figura adjunta $l_1 \parallel l_2$. Si $\measuredangle B = 100°$ y $\measuredangle C = \measuredangle A - 10°$, entonces $\measuredangle A$ es

A) $55°$

B) $45°$

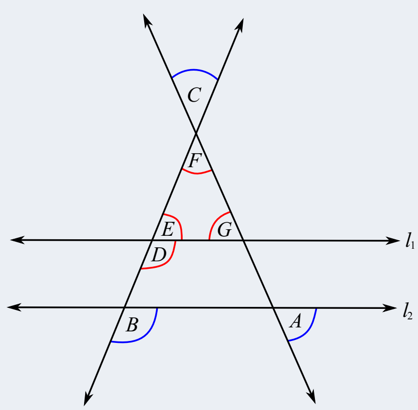
C) $100°$

D) $80°$



Solución

Con base en el teorema 1.5, se tiene que $\measuredangle B = \measuredangle D = 100°$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas. Por otra parte, $\measuredangle E = 180° - \measuredangle D = 180° - 100° = 80°$.



De acuerdo con la definición 1.2, $\angle C$ y $\angle F$ son ángulos opuestos por el vértice; así, $\measuredangle C = \measuredangle F = \measuredangle A - 10°$.

Los ángulos $\angle G$ y $\angle A$ son ángulos alternos externos entre paralelas (ver 1.5); así, $\measuredangle G = \measuredangle A$.

Solución - continuación

Los ángulos $\angle E$, $\angle F$ y $\angle G$ son los ángulos internos de un triángulo, por lo que basados en el teorema 1.6 se tiene que

$$\begin{aligned} & \measuredangle E + \measuredangle F + \measuredangle G = 180^\circ \\ \Rightarrow\ & 80^\circ + (\measuredangle A - 10^\circ) + \measuredangle A = 180^\circ \\ \Rightarrow\ & 2\measuredangle A = 180^\circ - 80^\circ + 10^\circ \\ \Rightarrow\ & \measuredangle A = \frac{110^\circ}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\measuredangle A = 55^\circ$. Respuesta correcta: opción A.

Ejercicio 1.7 Primera eliminatoria - segundo nivel - 2015 - ítem 8

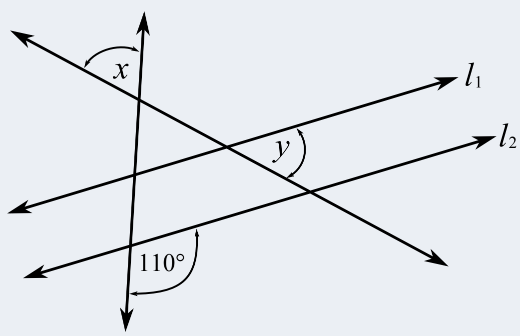
En la figura adjunta $l_1 \parallel l_2$. Si $\text{m}\angle y = \text{m}\angle x - 20^\circ$, entonces $\text{m}\angle x$ es

A) 25°

B) 45°

C) 65°

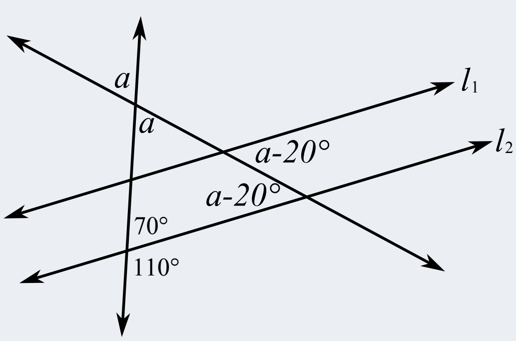
D) 70°



Solución

En la figura se colocan las medidas de los tres ángulos internos de un triángulo.

Si a representa la medida en grados del ángulo x, se tienen las tres medidas en mención: a por ser opuesto por el vértice (definión 1.2), 70° por ser ángulo suplementario y $a - 20^\circ$ por ser ángulo alterno interno entre paralelas (teorema 1.5).



Solución - continuación

Luego, con base en el teorema 1.6 se tiene que $a + 70^\circ + a - 20^\circ = 180^\circ \Rightarrow a = \dfrac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ$.

Respuesta correcta: opción C.

Teorema 1.7 (Desigualdad triangular) *La suma de las longitudes de dos lados de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado.*

Ejercicio 1.8 Primera eliminatoria - segundo nivel - 2013 - ítem 14

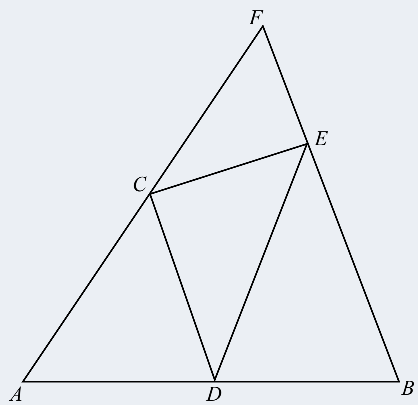
Se construyen triángulos de tal manera que todas las longitudes de sus lados son números enteros. Si $AD = CD = 3$ cm, $FE = 2$ cm, $EB = 5$ cm. y el resto de los segmentos tienen la misma medida, ¿cuál es la menor medida posible para estos segmentos?

A) 1 cm.

B) 2 cm.

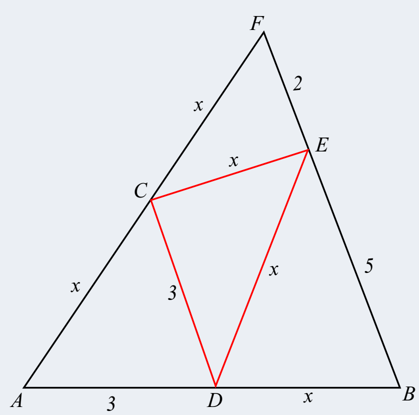
C) 3 cm.

D) 4 cm.



Solución

Considere los cinco triángulos que se presentan en la figura.



Solución - continuación

Al aplicar la desigualdad triangular en cada uno de los triángulos (ver teorema 1.7) y tomando en cuenta que x (la longitud de cada uno de los segmentos restantes) es un entero, se tienen los resultados siguientes:

En el $\Delta ACD : 3+x > 3$ y $6 > x \Rightarrow 0 < x < 6$.

En el $\Delta CED : 2x > 3 \Rightarrow x > 3/2$.

En el $\Delta DEB : 2x > 5 \Rightarrow x > 5/2$.

En el $\Delta CFE : 2x > 2 \Rightarrow x > 1$.

En el $\Delta AFB : 2x+7 > 3+x \Rightarrow x > -4, 10+x > 2x \Rightarrow x < 10$ y $3x+3 > 7 \Rightarrow x > 4/3$.

Como el menor entero x que satisface todas las condiciones es $x = 3$ cm, se concluye que la menor medida posible para los segmentos es 3 cm. Respuesta correcta: opción C.

Teorema 1.8 (Recíproco del teorema de Pitágoras) *Si la suma de los cuadrados de dos lados de un triángulo es igual al cuadrado del tercer lado, el ángulo opuesto al tercer lado es recto.*

Ejercicio 1.9 Primera eliminatoria - segundo nivel - 2013 - ítem 16

Los lados de un triángulo miden 6, 8 y 10. Entonces, la longitud de una altura del triángulo es

A) $\frac{12}{5}$

B) $\frac{24}{5}$

C) $\frac{15}{2}$

D) 10

Solución

Como $6^2 + 8^2 = 10^2$, por el teorema 1.8 se tiene que el triángulo es un triángulo rectángulo; dos de las alturas de este triángulo miden 6 y 8, respectivamente.

Con base en 1.2 se tiene que el área del triángulo es $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$.

Luego, si h representa la medida de la otra altura del triángulo (la altura sobre la hipotenusa), se tiene que $24 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot h \Rightarrow h = \frac{24 \cdot 2}{10} = \frac{24}{5}$. Respuesta correcta: opción B.

Definición 1.3 (Mediana de un triángulo) *Una mediana de un triángulo es un segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.*

Teorema 1.9 (Concurrencia de las medianas) *Las medianas de un triángulo son concurrentes y su punto de intersección divide a cada mediana en la razón* $2:1$.

Definición 1.4 (Centroide) *El punto G de concurrencia de las medianas de un triángulo se llama el centroide (o también el baricentro) del triángulo.*

Ejercicio 1.10 Primera eliminatoria - segundo nivel - 2013 - ítem 20

En un triángulo ABC se tiene que las longitudes de las medianas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ son 9, 12 y 15, respectivamente. Sea H el punto medio $\overline{GC}$, donde G es el baricentro o centroide del triángulo. El área del triángulo GDH es

A) 4

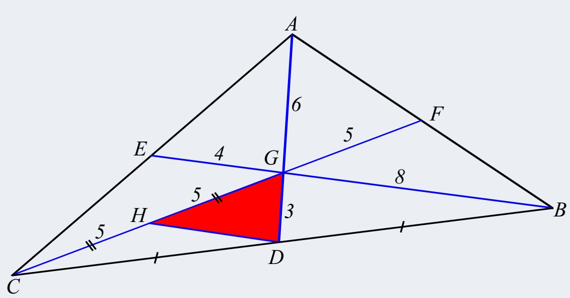
B) 6

C) 8

D) 12

Solución

De acuerdo con el teorema 1.9, se tienen los resultados siguientes: $BG = 8$, $GD = 3$ y $CG = 10$. Además, $GH = 5$, pues H es el punto medio de CH.



El segmento $\overline{DH}$ une los puntos medios del triángulo BGC y, de acuerdo con el teorema 1.3, su longitud debe ser la mitad del tercer lado; en este caso, $DH = \frac{1}{2}BG = 4$.

De acuerdo con lo anterior, el ΔGDH tiene longitudes 3, 4 y 5; así, el teorema 1.8 garantiza que dicho triángulo es un triángulo rectángulo pues $3^2 + 4^2 = 5^2$.

El área (ver definición 1.2) del ΔGDH es igual $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$. Respuesta correcta: opción B.

Ejercicio 1.11 Primera eliminatoria - segundo nivel - 2012 - ítem 8

Dados cuatro puntos no colineales en un plano π_1 y tres puntos no colineales en un plano π_2, $\pi_2 \parallel \pi_1$, el número máximo de rectas que quedan determinadas por estos siete puntos es

A) 12

B) 18

C) 21

D) 28

Solución

En π_1 (donde hay cuatro puntos no colineales) quedan determinadas seis rectas.

En π_2 (donde hay tres puntos no colineales) quedan determinadas tres rectas.

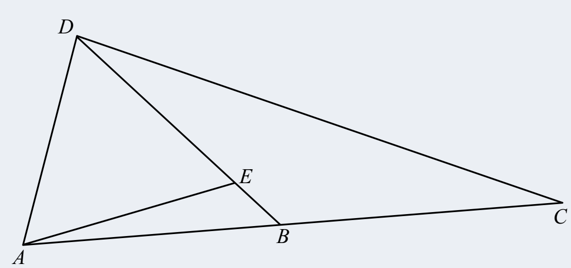
Además, cada uno de los cuatro puntos de π_1 con cada uno de los tres puntos de π_2 determinan una recta; es decir, 12 rectas en total.

Por lo tanto, quedan determinadas $6+3+12=21$ rectas. Respuesta correcta: opción C.

Teorema 1.10 (Ángulo externo en un triángulo) *En todo triángulo, la medida de un ángulo externo es igual a la suma de las medidas de sus dos ángulos internos no adyacentes.*

Ejercicio 1.12 Primera eliminatoria - segundo nivel - 2012 - ítem 9

En la figura adjunta el ΔAED es equilátero y el ΔBCD es isósceles, además $\measuredangle DAB = 70°$, $D-E-B$ y $A-B-C$. Entonces $\measuredangle ADC$ corresponde a



A) $85°$

B) $87,5°$

C) $100°$

D) $110°$

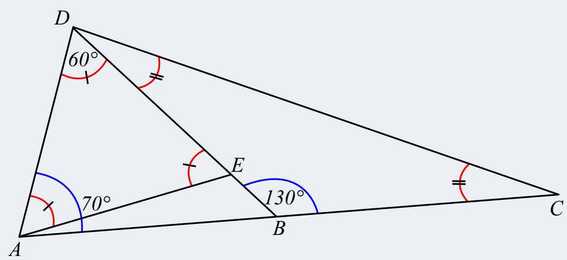
Solución

Como el ΔAED es equilátero, entonces los ángulos $\angle AED$, $\angle EDA$ y $\angle DAE$ son congruentes y miden $60°$ cada uno.

Como el $\angle AEB$ es suplementario con el $\angle AED$, se cumple que $\measuredangle AEB = 180° + 60° = 120°$.

Por otra parte, $\measuredangle DAB = \measuredangle DAE - \measuredangle EAB \Rightarrow \measuredangle EAB = 70° - 60° = 10°$.

En el ΔAEB y de acuerdo con el teorema de la medida de un ángulo externo de todo triángulo, teorema 1.10, se tiene que $\measuredangle AEB + \measuredangle EAB = \measuredangle EBC \Rightarrow \measuredangle EBC = 120° + 10° = 130°$.



Dado que el ΔBCD es isósceles y dado que el $\angle DBC$ es obtuso, se tiene los ángulos que poseen la misma medida son los ángulos $\angle BDC$ y $\angle BCD$; así, de acuerdo con el teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de todo triángulo, teorema 1.6, se cumple que $\measuredangle BDC + \measuredangle BCD + \measuredangle DBC = 180°$, luego, $2 \cdot \measuredangle BDC = 180° - \measuredangle DBC = 180° - 130° = 50° \Rightarrow \measuredangle BDC = 25°$.

Por lo tanto, $\measuredangle ADC = \measuredangle ADE + \measuredangle BDC = 60° + 25° = 85°$. Respuesta correcta: opción A.

Definición 1.5 (Meditriz de un segmento) *La mediatriz de un segmento $\overline{AB}$ es la línea recta perpendicular a dicho segmento que contiene su punto medio.*

Teorema 1.11 (Concurrencia de las mediatrices) *Las mediatrices de los tres lados de todo triángulo son concurrentes y este punto equidista de los tres vértices del triángulo.*

Definición 1.6 (Circuncentro) *El punto O de concurrencia de las mediatrices de los lados de todo triángulo se llama circuncentro.*

Ejercicio 1.13 Primera eliminatoria - segundo nivel - 2015 - ítem 17

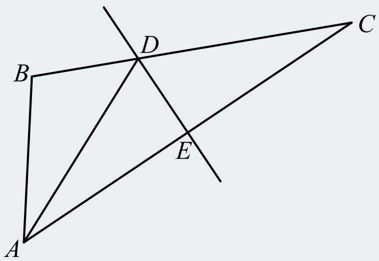
En la figura adjunta $\overleftrightarrow{DE}$ es la mediatriz del ΔABC sobre el lado $\overline{AC}$ y $m\angle BDA = 50$. La medida, en grados, del $\angle BCA$ es

A) 15

B) 25

C) 30

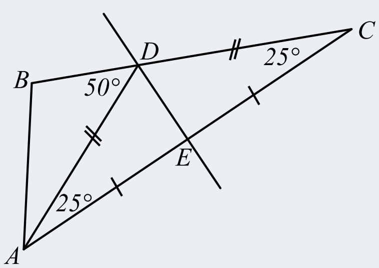
D) 45



Solución

Como $\overleftrightarrow{DE}$ es mediatriz del ΔABC, se cumple que $EC = EA$ y $DC = DA$ (ver definición 1.5).

Esto último indica que el ΔADC es isósceles, por lo que $m\angle DCA = m\angle DAC = 25°$, ya que el ángulo externo $\angle BDA$ mide lo mismo que la suma de estos dos ángulos internos no adyacentes a él.



Respuesta correcta: opción B.

Definición 1.7 (Perímetro de un polígono) *El perímetro de todo polígono es igual a la suma de las medidas de sus lados.*

Teorema 1.12 (Área de un rectángulo) *El área de todo rectágulo es igual al producto de su base y su altura.*

Ejercicio 1.14 Primera eliminatoria - segundo nivel - 2012 - ítem 25

Un cuadrado A tiene igual área que un rectángulo B, en el cual el largo mide 2 cm. más que la mitad de lo que mide el lado de A, y el ancho de B mide 1 cm. menos que el doble de lo que mide el lado de A. La diferencia entre el perímetro de B y el perímetro de A, en centímetros, es un número

A) mayor que 3

B) entre 2 y 3

C) entre 1 y 2

D) entre 0 y 1

Solución

Sea x la medida del lado del cuadrado A.

Como el largo del rectángulo B mide 2 cm. más que la mitad de lo que mide el lado del cuadrado A, se tiene que el largo del rectángulo B mide $\frac{x}{2}+2$.

Como el ancho del rectángulo B mide 1 cm. menos que el doble de lo que mide el lado del cuadrado A, se tiene que el ancho del rectángulo B mide $2x-1$.

Luego, de acuerdo con el teorema 1.12, se tiene que el área del cuadrado A está dada por x^2 y el área del rectángulo B está dada por $(2x-1)\left(2+\frac{x}{2}\right)$.

Además, se indica en el enunciado que el cuadrado A tiene igual área que el rectángulo B, por lo que al igualar sus áreas obtenidas anteriormente se tiene que:

$$
\begin{aligned}
& x^2 = (2x-1)\left(2+\frac{x}{2}\right) \\
\Rightarrow\ & x^2 = 4x + x^2 - 2 - \frac{x}{2} \\
\Rightarrow\ & 2 = 4x - \frac{x}{2} \\
\Rightarrow\ & 2 = \frac{8x-x}{2} \\
\Rightarrow\ & 4 = 7x \\
\Rightarrow\ & \frac{4}{7} = x
\end{aligned}
$$

Solución - continuación

Ahora, de acuerdo con la definición 1.7, el perímetro del cuadrado A es igual a $4x = 4 \cdot \frac{4}{7} = \frac{16}{7}$ y el perímetro del rectángulo B es igual a $2(2x-1) + 2\left(2+\frac{x}{2}\right) = 2\left(2\cdot\frac{4}{7}-1\right) + 2\left(2+\frac{4/7}{2}\right) = 2\left(\frac{8}{7}-1\right) + 2\left(2+\frac{2}{7}\right) = 2\cdot\frac{1}{7} + 2\cdot\frac{16}{7} = \frac{2}{7} + \frac{32}{7} = \frac{34}{7}$.

La diferencia entre el perímetro del rectángulo B y el perímetro del cuadrado A está dada por $\frac{34}{7} - \frac{16}{7} = \frac{18}{7} = 2\frac{4}{7} \approx 2{,}57$.

Respuesta correcta: opción B.

Ejercicio 1.15 Primera eliminatoria - segundo nivel - 2015 - ítem 20

Sea ΔABC isósceles, tal que $AC = BC = 20$ cm y sea D un punto cualquiera de $\overline{AB}$ (distinto de A y distinto de B). Por D se trazan una recta paralela a $\overline{AC}$ que corta a $\overline{BC}$ en E y una recta paralela a $\overline{BC}$ que corta a $\overline{AC}$ en F. El perímetro, en centímetros, del $\square CEDF$ es

A) 20

B) 30

C) 40

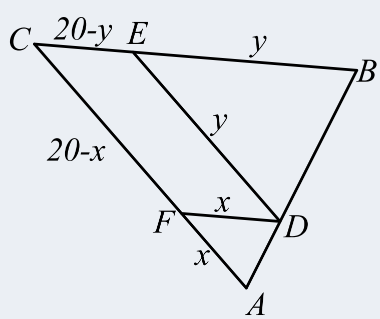
D) 50

Solución

Los ángulos $\angle BAC$ y $\angle ABC$ son congruentes, pues ΔABC es isósceles; sea α la medida de dichos ángulos.

Dado que $\overline{DF} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$, se cumple que $\angle FDA \cong \angle CBA$ y $\angle BAC \cong \angle BDE$ por ser, respectivamente, ángulos correspondientes entre paralelas (ver teorema 1.5); todos estos con medida α.

Así, son isósceles también los triángulos ΔAFD y ΔDEB.



Solución - continuación

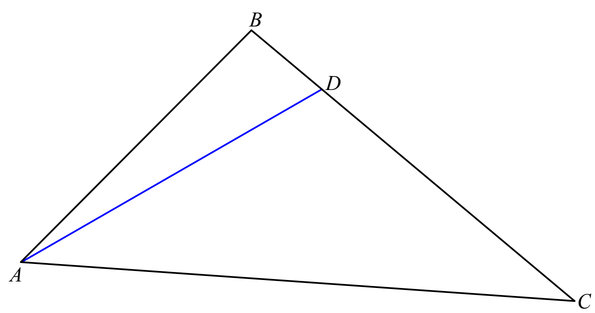
Sea $FA = FD = x$, $ED = EB = y$.

El perímetro (ver defindición 1.7) del $\square CEDF = (20-y)+y+x+(20-x) = 40$.

Respuesta correcta: opción C.

2 Ejercicios propuestos

2.1 (Primera eliminatoria - segundo nivel - 2012 - ítem 16) *En la figura adjunta, la bisectriz del* $\angle B$ *interseca a* $\overline{AC}$ *en* E *y a* $\overline{AD}$ *en* M. *Si* $\measuredangle BCA = 50°$, $\measuredangle DAB = 15°$ *y* $\measuredangle DMB = 55°$, *entonces con certeza se cumple que*



A) ΔABC *es escaleno*

B) ΔABC *es equilátero*

C) $\overline{AD}$ *es mediana sobre* $\overline{BC}$

D) $\overline{BE}$ *es mediana sobre* $\overline{AC}$

Respuesta correcta: opción D.

2.2 (Primera eliminatoria - segundo nivel - 2012 - ítem 17) *Si* $\overline{BD}$, $\overline{CF}$ *y* $\overline{AE}$ *son alturas del* ΔABC *que se intersecan en el punto* P, *con* P *en el interior del triángulo, tales que* $\measuredangle BPE = 60°$ *y* $\measuredangle DPC = 70°$, *entonces con certeza se cumple que* ΔABC *es*

A) *escaleno*

B) *isósceles*

C) *obtusángulo*

D) *rectángulo*

Respuesta correcta: opción A.

2.3 (Primera eliminatoria - segundo nivel - 2013 - ítem 17) *Una escalera se apoya sobre un muro de manera que sale una parte de ella por encima del muro. Si el pie de la escalera está a 5 metros, la parte de la escalera que sobresale mide 10 m, mientras si la base está a 9 metros sobresalen 8 m. de la escalera. Entonces, la altura del muro es*

A) 10 m.

B) 12 m.

C) 14 m.

D) 20 m.

Respuesta correcta: opción B.

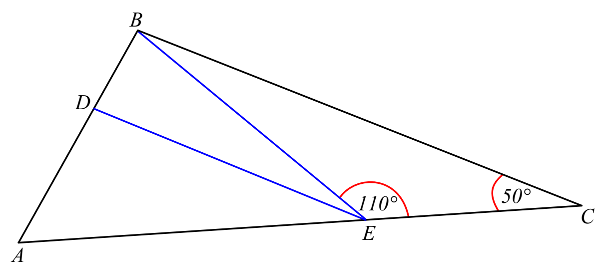
2.4 (Primera eliminatoria - segundo nivel - 2013 - ítem 25) *Considere la siguiente figura, si se tiene que $\overline{BC}$ y $\overline{DE}$ son alturas de los triángulos ΔABC y ΔADE, respectivamente, entonces con certeza se cumple que*

A) $AE > AB$

B) $BE > AB$

C) $CB > AC$

D) $AB > EC$



Respuesta correcta: opción D.

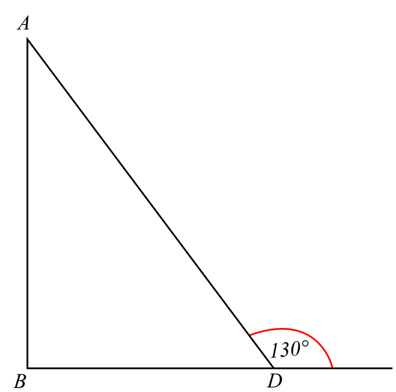
2.5 (Primera eliminatoria - segundo nivel - 2013 - ítem 26) *De acuerdo con la siguiente figura, se tiene que $\measuredangle B$ es tres veces $\measuredangle A$ disminuido en $10°$. Entonces el ΔABD es*

A) rectángulo y escaleno

B) obtusángulo y escaleno

C) rectángulo e isósceles

D) obtusángulo e isósceles



Respuesta correcta: opción B.

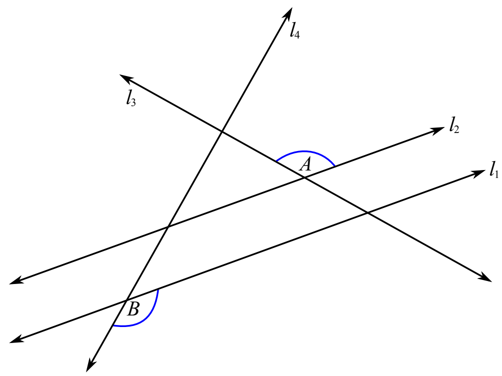
2.6 (Primera eliminatoria - segundo nivel - 2012 - ítem 4) *En la figura adjunta* $l_1 \parallel l_2$ *y* $l_3 \perp l_4$. *Si* $\measuredangle A = 125^\circ$, *entonces* $\measuredangle B$ *es*

A) 125°

B) 135°

C) 145°

D) 155°



Respuesta correcta: opción C.

2.7 (Primera eliminatoria - segundo nivel - 2012 - ítem 12) *El número máximo de triángulos en los cuales dos lados miden 6 cm. y 9 cm. y la medida del tercer lado es un número natural corresponde a*

A) 3

B) 5

C) 8

D) 11

Respuesta correcta: opción D.

3 Sugerencias a los ejercicios propuestos

3.1 (Primera eliminatoria - segundo nivel - 2012 - ítem 16) *Trace $\overline{BE}$ y note que $55°$ es la medida de un ángulo externo del ΔABM, por lo que puede hallar la medida del $\angle ABM$ (que es igual a la medida del $\angle MBD$ -pues $\overline{BE}$ es bisetriz del $\angle ABC$).*

Con las medidas anteriores, halle la medida del $\angle BCA$ y tendría que el ΔABC es isósceles (pero no equilátero).

Pruebe que los triángulos ΔBEC y ΔBEA son semejantes (además, son triángulos rectángulos) y de ahí podrá concluir que $\overline{BE}$ es mediana sobre $\overline{AC}$.

Utilizando argumentos asociados con los triángulos ΔADB y ΔADC se puede descartar que $\overline{AD}$ sea mediana de $\overline{BC}$.

3.2 (Primera eliminatoria - segundo nivel - 2012 - ítem 17) *Dado que las alturas se intersecan dentro del triángulo, es imposible que dicho triángulo sea un triángulo rectángulo; tampoco puede ser un triángulo obtusángulo por ese mismo motivo.*

Determine las medidas de los ángulos internos del ΔABC y compruebe que son todas distintas, por lo que el triángulo es escaleno.

3.3 (Primera eliminatoria - segundo nivel - 2013 - ítem 17) *Utilice dos variables para indicar, respectivamente, la longitud de la escalera y la altura del muro.*

Con base en el teorema de Pitágoras aplicado en los triángulos formados por la escalera y el muro en las dos situaciones planteadas, se obtienen dos ecuaciones que relaciones a las variables definidas. Al resolver las ecuaciones se obtiene que la longitud de la escalera es 23 metros y la altura del muro es 12 metros.

3.4 (Primera eliminatoria - segundo nivel - 2013 - ítem 25) *Los segmentos $\overline{DE}$ y $\overline{BC}$ son paralelos -pues ambos son perpendiculares al lado $\overline{AB}$.*

Con lo anterior, es posible indicar las medidas de varios de los ángulos presentes en la figura y, basados en la relación entre los ángulos y los lados es posible indicar que la única relación posible es que $AB > EC$.

3.5 (Primera eliminatoria - segundo nivel - 2013 - ítem 26) *Considerando el ΔABD, note que $130°$ es la medida de uno de sus ángulos externos, así que ese es justamente el valor correspondiente con la suma de las medidas de los dos ángulos internos no adyacentes a ese ángulo.*

Con lo anterior y lo mencionado en el enunciado, es posible determinar cada una de las medidas de los ángulos internos del ΔABD *-dichas medidas son* $35°$*,* $105°$ *y* $50°$*, por lo que el triángulo en cuestión es escaleno obtusángulo.*

3.6 (Primera eliminatoria - segundo nivel - 2012 - ítem 4) *El ángulo formado por las rectas* l_3 *y* l_4 *mide* $90°$ *pues dichas rectas se cortan de manera perpendicular.*

Averigüe las medidas de los otros dos ángulos del triángulo formado por las rectas l_3*,* l_4 *y* l_2*.*

Dado que las rectas l_1 *y* l_2 *son paralelas cortadas por la recta* l_4*, utilice el teorema asociado con las medidas de los distintos ángulos formados y pruebe que* $145°$ *es la medida del ángulo buscado.*

3.7 (Primera eliminatoria - segundo nivel - 2012 - ítem 12) *Utilice alguna variable para designar la medida del tercer lado del triángulo.*

Utilizando la desigualdad triangular aplicada en ese triángulo donde 6 y 9 son las otras medidas de los lados restantes, puede deducir que esta variable puede tomar valores enteros entre 3 y 15.

Así, son 11 valores enteros los que se encuentran en dicho intervalo.

4 Créditos

Este documento es un material de apoyo sobre Geometría para estudiantes que participan en el segundo nivel de la primera eliminatoria de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas.

Autor
Christian Páez Páez.

Editor
Christian Páez Páez.

Revisor
Christian Zamora Jaén.

Para referenciar este documento
Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas (2016). Material de apoyo sobre Geometría: II nivel, I Eliminatoria. San José, Costa Rica: autor.