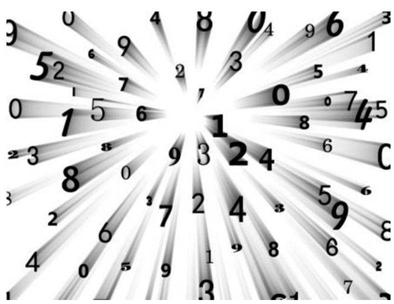
OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

UNA - UCR - TEC - UNED - MEP - MICIT

Teoría de Números



II Nivel

I Eliminatoria

Abril, 2015

Índice

1. Presentación

El presente material pretende ser una guía para el estudiante que participa en II o III nivel de la Olimpiada Costarricense de Matemática, que corresponde a estudiantes de octavo a duodécimo año de colegio. Con él se busca que el estudiante conozca el tipo de problemas de Teoría de Números a los que se va a enfrentar en la I Eliminatoria de esta olimpiada. Es importante mencionar que el estudiante debe conocer como requisito el material de álgebra debido a que en el desarrollo de los ejercicios se requiere de su uso. En la siguiente sección se presenta el temario completo de Teoría de Números para tener una visión global de los contenidos que debe manejar para resolver los ejercicios de esta eliminatoria en el Nivel II y III. Posteriormente se desglosan estos temas y se hace un resumen de los conceptos matemáticos y propiedades más relevantes del temario; además se ofrece una serie de ejemplos y ejercicios, tomados de las primeras eliminatorias de años anteriores, de modo que se observe cómo se aplica dicha materia a problemas concretos. Además, los ejercicios "aunque se tomaron de ambos niveles" están enfocados al temario del II nivel.

2. Temario

Concepto de divisibilidad: divisor, múltiplo. Propiedades. El algoritmo de la división. Números primos y compuestos. El teorema fundamental de la aritmética (descomposición canónica). Reglas de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11. Obtener los divisores positivos de un número natural. Máximo común divisor. Mínimo común múltiplo. Notación desarrollada de un número en base 10.

3. Divisibilidad

Sean a, b enteros, se dice que a es divisible por b (o que b es un divisor de a, o b divide a a, o a es un múltiplo de b) y se denota $b|a$ si existe el entero c tal que $a = b \cdot c$. Si b no divide a a se escribe $b \not| \ a$.

Tenemos entonces que: $\boxed{b|a \Leftrightarrow \exists \ c, c \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a = b \cdot c}$

Así, $-9|54$ pues $54 = -9 \cdot -6$ y $5|0$ pues $0 = 5 \cdot 0$

Además, si $2|a$ se dice que a es par y se expresa de la forma $a = 2b$ con b entero.

1. (Pregunta N° 9, I Eliminatoria 2010, Nivel B)
   El dígito de las unidades del producto de seis números naturales consecutivos es el siguiente:

   a) 0

   b) 2

   c) 7

   d) 8

   Solución
   Propiedad: El producto de n enteros consecutivos es divisible por $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$. Si n es el producto de los 6 números naturales consecutivos, entonces es divisible por $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ por lo que $n = 720a = 10 \cdot 72a$ y así el dígito de las unidades de n es cero.

2. (Pregunta N° 14, I Eliminatoria 2009, Nivel B)
   ¿Cuál es el mayor entero que divide a la suma de los cuadrados de cualesquiera tres pares consecutivos?

   a) 1

   b) 2

   c) 3

   d) 4

   Solución
   Llamemos a los tres pares consecutivos $2n-2$, $2n$ y $2n+2$. Tenemos:

$$\begin{aligned}(2n-2)^2 + (2n)^2 + (2n+2)^2 &= (4n^2 - 8n + 4) + 4n^2 + (4n^2 + 8n + 4)\\ &= 12n^2 + 8\\ &= 4(3n^2 + 2)\end{aligned}$$

Por lo tanto el mayor número que divide a la suma de los cuadrados de tres pares de consecutivos es 4.

3. (Pregunta N° 17, I Eliminatoria 2013, III Nivel)
El menor número de enteros positivos consecutivos cuya suma es 1000 corresponde a

   a) 4

   b) 5

   c) 6

   d) 7

   Solución
   Propiedad: La suma de m enteros $1, 2, ..., m-1, m$ corresponde a $1+2+...+m-1+m = \frac{m(m+1)}{2}$. Por ejemplo, $1+2+...+9+10 = \frac{10(10+1)}{2} = 55$.

   Sean $k, k+1, ..., k+(n-2), k+(n-1)$ los n enteros consecutivos. Entonces

   $k+(k+1)+...+(k+(n-1)) = \underbrace{(k+...+k)}_{n\ veces} + (1+2+...+n-1) =$

   $nk + \frac{(n-1)n}{2} = n\left(k+\frac{n-1}{2}\right)$.
   Como la suma debe ser 1000, entonces $n\left(k+\frac{n-1}{2}\right) = 1000$ por lo que se tendría que $n/1000$ (n divisor de 1000) y $n-1$ que debe ser par. Así, el primer entero positivo que lo cumple es $n=5$.

4. Algoritmo de la división

Sean a, b enteros y $a \neq 0$. Entonces existen unos únicos enteros q, r tales que $b = aq + r$ con $0 \leq r < |a|$. Además, si $r = 0$ entonces $a|b$ y "viceversa".
En el resultado anterior, los enteros r y q reciben, respectivamente el nombre de residuo o resto y de cociente al dividir b por a.
Además, si el cociente es 2 todo número entero se puede escribir de la forma $n = 2q$ o $n = 2q+1$. Es decir, todo entero es par o impar.

EJEMPLOS

1. (Pregunta N° 12, I Eliminatoria 2011, Nivel B)
   El dígito de la expansión desimal de $\frac{2}{7}$ que se ubica en la posición 2011 corresponde a

   a) 2

   b) 4

   c) 5

   d) 7

   Solución
   $\frac{2}{7} = 0,\overline{285714}$ por lo que la expansión decimal consta de 6 dígitos. Al dividir 2011 entre 6 el residuo es 1, esto es, el dígito que se encuentra en la posición uno es el 2.

2. (Pregunta N° 20, I Eliminatoria 2014, II Nivel)
   Al dividir dos números el cociente es 3 y el residuo es 7. Si la diferencia entre los números es 257, entonces el mayor de los números es

   a) 368

   b) 375

   c) 382

   d) 771

   Solución
   Sean a y b los números, $a > b$. El sistema de ecuaciones lineales que resuelve el problema es el siguiente:

   $$\begin{cases} \text{a} = 3b + 7 & (1) \\ \text{a - b} = 257 & (2) \end{cases}$$

   Sustituyendo (1) en (2) se obtiene:

   $3b + 7 - b = 257$
   $\Rightarrow b = 125$

$\Rightarrow a = 3 \cdot 125 + 7 = 382.$

3. (Pregunta N° 5, I Eliminatoria 2015, III Nivel)
En el planeta Orion el año dura lo mismo que en el nuestro, los días de la semana son los mismos pero no hay meses y las fechas son números desde 1 hasta 365. Así, el 1 de enero es el día 1 y el 31 de diciembre el es día 365. Siete extraterrestres cumplen años en días de la semana diferentes. Si se suman las fechas de los cumpleaños, el residuo de dividir la suma por 7 es

   a) 0

   b) 1

   c) 3

   d) 6

   Solución
   Como cada día del año es un día de la semana y la semana tiene 7 días, por el algoritmo de la división al ser cada día un número del 1 al 365, se puede expresar de la forma $7p + r$ con $0 \leq r < 7$. Así, al cumplir cada extraterrestre en un día distinto se tienen las formas $7q_0, 7q_1 + 1, 7q_2 + 2, 7q_3 + 3$,$7q_4 + 4, 7q_5 + 5$ y $7q_6 + 6$. Por lo tanto, la suma es $7(q_0 + q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6) + 21 = 7k$ con k entero, por lo que es múltiplo de 7 y su residuo es 0.

4. (Pregunta N° 2, I Eliminatoria 2010, Nivel B)
¿Cuál es el mayor residuo posible cuando un número de dos dígitos se divide por la suma de sus dígitos?

   a) 14

   b) 15

   c) 16

   d) 17

   Solución
   Sea x un número de dos dígitos con a el dígito de las decenas y b el de las unidades,

entonces $x = ab$. El máximo valor que puede tomar la expresión $a+b$ es 18 (cuando $a=b=9$) en cuyo caso $99 : 18$ tiene residuo 9.
Por otro lado, si $a+b=17$ entonces $a=9$ y $b=8$ ó $a=8$ y $b=9$, en estos casos $98 : 17$ tiene residuo 13 y $89 : 17$ tiene residuo 4. Si $a+b=16$, se tiene $a=9$ y $b=7$ ó $a=8$ y $b=8$ ó $a=7$ y $b=9$, en estos casos $97 : 16$ tiene residuo 1, $88 : 16$ tiene residuo 8 y $79 : 16$ tiene residuo 15. Es claro que si $a+b<16$, al ser cociente por el algoritmo de la división el residuo de $x : (a+b)$ debe ser menor que 15, por lo que 15 es el mayor residuo que puede obtenerse al dividir un número de dos dígitos por la suma de sus dígitos.

5. (Pregunta N° 25, I Eliminatoria 2015, III Nivel)
Sea a_n el término n en la sucesión

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$$

Considere los 2015 primeros elementos de dicha sucesión. Entre ellos, la cantidad de números que deja residuo 2 al dividirse entre 3 es

a) 0

b) 672

c) 1007

d) 1343

Solución
La clave es notar que los elementos de la sucesión a_n se obtienen al sumarle n al elemento anterior, lo que hace que la sucesión a_n se pueda expresar como

$$a_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ahora bien, a_n es divisible entre 3 si n o $n+1$ es divisible entre 3, lo cual ocurre si $n = 3k$ o $n = 3k+2$, para algún k entero positivo. Por lo tanto, a_n solo podría dar residuo distinto a 0 en el caso de que $n = 3k+1$. Sustituyendo $3k+1$ en la fórmula tenemos que

$$a_{3k+1} = \frac{(3k+1)(3k+2)}{2}.$$

Por lo tanto,

$$a_{3k+1} = \frac{(3k+1)(3k+2)}{2} = \frac{9k^2+9k+2}{2} = \frac{9k(k+1)}{2} + 1.$$

Como $k(k+1)$ es divisible entre 2, la expresión anterior se puede expresar de la forma $3r+1$ con r entero y así a_{3k+1} deja residuo 1 siempre al dividirse entre 3, por lo que nunca algún número de (a_n) dejará residuo 2.

5. Notación desarrollada

Sean $n = a_k a_{k-1} ... a_1 a_0$ un número entero positivo de $k+1$ dígitos. Se llama notación desarrollada del número n a la expresión $n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + ... + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$

Por ejemplo, $1235 = 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 = 1 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5$

EJEMPLOS

1. (Pregunta N° 19, I Eliminatoria 2009, Nivel B)
   Un número de dos cifras es sumado al número que se obtiene invirtiendo sus cifras. Si se divide la suma obtenida por la suma de las cifras del número dado y se eleva al cuadrado el resultado.
   ¿Qué número se obtiene?

   a) 22

   b) 100

   c) 121

   d) 484

   Solución
   El número original se puede expresar utilizando la notación desarrollada de la siguiente manera $10x + y$. De la misma manera el número invertido se expresa así $10y + x$.
   Aplicando la operación solicitada se tiene:

   $$\left(\frac{10x + y + 10y + x}{x + y}\right)^2 = \left(\frac{11x + 11y}{x + y}\right)^2 = \left(\frac{11(x + y)}{x + y}\right)^2 = 11^2 = 121$$

2. (Pregunta N° 29, I Eliminatoria 2013, II Nivel)
   Si a, b y c son dígitos y conociendo que $a + b + c = 21$. Entonces el valor de la suma de los siguientes números de tres cifras $abc + bca + cab$ corresponde a

   a) 63

   b) 1234

c) 2013

d) 2331

Solución
Utilizando la notación desarrollada se tiene que
$abc + bca + cab = (a100 + b10 + c) + (b100 + c10 + a) + (c100 + a10 + b)$
$= (a100 + b100 + c100) + (b10 + c10 + a10) + (c + a + b)$
$= (a + b + c)100 + (b + c + a)10 + (c + a + b)$
$= 21 \cdot 100 + 21 \cdot 10 + 21 = 2100 + 210 + 21 = 2331$
También se puede resolver este ejemplo con la notación habitual de suma de la siguiente manera:

$$\begin{array}{cccc} & a & b & c \\ & b & c & a \\ + & c & a & b \\ \hline 2 & 3 & 3 & 1 \end{array}$$

3. (Pregunta N° 23, I Eliminatoria 2011, Nivel C)
Lucrecia toma un número entero positivo impar de dos cifras, lo multiplica por 100 y obtiene un número de 4 cifras. El resultado lo divide entre dos, le suma 50 y obtiene un númro de 4 cifras divisible por 9. Entonces, la cantidad de números que Lucrecia puede tomar originalmente es

a) 1

b) 4

c) 5

d) 9

Solución
Llamemos al número original $n = ab = 10a + b$. Como es impar $b \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$.
Multiplicar por 100 y dividir entre 2 equivale a multiplicar por 50, entonces $\frac{n \cdot 100}{2} + 50 = 50 \cdot n + 50 = 50 \cdot (n + 1) = 50 \cdot (10a + b + 1)$. Como 50 no es divisible por 9 (ni contiene factor 3) entonces $10a + b + 1$ debe ser divisible entre 9. Analicemos los posibles valores de b.
$b = 1 : 10a + b + 1 = 10a + 2 = 2(5a + 1) \Rightarrow a = 7$ pues $5 \cdot 7 + 1 = 36$ es divisible entre 9.
$b = 3 : 10a + b + 1 = 10a + 4 = 2(5a + 2) \Rightarrow a = 5$ pues $5 \cdot 5 + 2 = 27$ es divisible entre 9.

$b = 5 : 10a + b + 1 = 10a + 6 = 2(5a + 3) \Rightarrow a = 3$ pues $5 \cdot 3 + 3 = 18$ es divisible entre 9.
$b = 7 : 10a + b + 1 = 10a + 8 = 2(5a + 4) \Rightarrow a = 1$ pues $5 \cdot 1 + 4 = 9$ es divisible entre 9.
$b = 9 : 10a + b + 1 = 10a + 10 = 10(a + 1) \Rightarrow a = 8$ pues $8 + 1 = 9$ es divisible entre 9.
Los números obtenidos son $71, 53, 35, 17, 89$. Se debe descartar 17 pues no genera un número de 4 cifras, como establece el enunciado. Por lo tanto, la cantidad es 4.

6. Criterios de divisibilidad

Expresando $m = a_k a_{k-1} ... a_1 a_0$ donde los $a_0, ..., a_k$ denotan dígitos. El entero positivo m es divisible por:

1. 2 si y sólo si a_0 es un dígito par

2. 3 si y sólo si $3|a_k + a_{k-1} + ... + a_1 + a_0$. Es decir, si 3 divide a la suma de sus dígitos

3. 4 si y sólo si $4|a_1 a_0$. Es decir, si 4 divide al número $a_1 a_0$

4. 5 si y sólo si $a_0 = 0$ ó $a_0 = 5$

5. 6 si y sólo si $2|m$ y $3|m$

6. 7 si y sólo si $7/[a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 - 2a_0]$. Es decir; si 7 divide al número que se obtiene al restar el número original sin el dígito de las unidades con el dígito de las unidades multiplicando por 2

7. 8 si y sólo si $8|a_2 a_1 a_0$. Es decir, si 8 divide al número $a_2 a_1 a_0$

8. 9 si y sólo si $9|a_k + a_{k-1} + ... + a_1 + a_0$. Es decir, si 9 divide a la suma de sus dígitos

9. 10 si y sólo si $a_0 = 0$

10. 11 si y sólo si $11|(-1)^k a_k + (-1)^{k-1} a_{a-1} + ... + (-1)^1 a_1 + (-1)^0 a_0$. Es decir, si al restar la suma de sus cifras de una por medio con la suma de las restantes se obtiene un múltiplo de 11.

EJEMPLOS

1. (Pregunta N° 12, I Eliminatoria 2010, Nivel B)
   Sea T el conjunto de todos los números naturales de diez dígitos que contienen solo ceros y unos (el primer dígito de cada elemento de T debe ser uno). La cantidad de elementos de T, que son divisibles por 9 es la siguiente:

   a) 9

   b) 10

   c) 8

   d) 11

   Solución
   Un número es divisible por 9 si la suma de sus cifras lo es, entonces en el número debe haber 9 unos y un cero, que puede tomar 9 posiciones diferentes. Así, hay 9 elementos de T que son divisibles por 9.

2. (Pregunta N° 5, I Eliminatoria 2013, II Nivel)
   La cantidad de números de 5 dígitos de la forma $42x4y$, en donde x representa el dígito de las centenas y y es el dígito de las unidades, que son divisibles por $3, 4$ y 5 corresponde a

   a) 1

   b) 2

   c) 3

   d) 4

   Solución
   Para que un número sea divisible por 5 debe terminar en 5 o en 0. Sin embargo, si un número termina en 5 no es divisible por 4. Por lo tanto $y = 0$.
   Para que un número sea divisible por 3, la suma de sus dígitos debe ser múltiplo de 3. De esta manera $4 + 2 + x + 4 + 0 = 3k$, es decir, $10 + x = 3k$.
   Como x puede tomar valores entre 0 y 9, se tiene que $3k$ debe ser un número entre 10 y

19.
En este conjunto los múltiplos de 3 son: $12, 15, 18$. De ahí que x puede ser $2, 5$ y 8. Por lo tanto, existen 3 números.

3. (Pregunta N° 11, I Eliminatoria 2015, II Nivel)
   Sea n un número par múltiplo de 7 y menor que 1 000, tal que la suma de sus dígitos es 23 y su residuo al dividirlo por 5 es 1. La cantidad de números n que cumplen con lo anterior es

   a) 0

   b) 1

   c) 2

   d) 3

   Solución
   Como al dividirlo por 5 su residuo es 1, el número debe terminar en 106 pero como es un número par, entonces el dígito de las unidades es 6. Ahora, como la suma de los dígitos es 23 y es menor que 1000, debe ser de 3 dígitos y uno 6 entonces, la suma de los otros dos es 17 por lo que al ser dígitos son 9 y 8. Por último, los posibles números son 986 y 896, donde el múltiplo de 7 es 896. Por lo tanto, el único valor de n es 896.

4. (Pregunta N° 20, I Eliminatoria 2011, Nivel B)
   La cantidad de números enteros positivos de cuatro dígitos que son divisibles entre 11 de modo que la primera cifra corresponda a la suma de las cifras de las unidades y decenas y la segunda cifra a la diferencia de la cifra de la decenas y de las unidades es

   a) 0

   b) 2

   c) 4

   d) 8

   Solución
   Considere un número de 4 cifras $n = abcd$. Se tiene que $a = c + d$ y $b = c - d$. Para que n sea divisible por 11 se debe cumplir que la expresión $(a + c) - (b + d)$ tiene que ser

múltiplo de 11, y sustituyendo $(a+c)-(b+d)=(c+d+c)-(c-d+d)=c+d$.
Para que $c+d$ sea múltiplo de 11 debe cumplirse $c+d=0$ ó $c+d=11$, pues son cifras.
El primer caso se descarta pues llevaría a $c=d=a=b=0$.
El segundo caso también debe descartarse, pues como $c+d=a$, entonces $a=11$ lo cual no es posible pues es un dígito. Así, no existen números que cumplan las condiciones.

5. (Pregunta N° 5, I Eliminatoria 2009, Nivel B)
Determine la suma de los dígitos x, y, z, si el número $13xy45z$ es divisible por 792.

   a) 5

   b) 9

   c) 14

   d) 27

Solución
Tenemos que $792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$
El número $13xy45z$ es múltiplo de 792 luego es múltiplo de cada uno de sus factores con la multiplicidad que nos da su exponente; es decir, de $8, 9$ y 11.
El número es múltiplo de 8, entonces $45z$ es múltiplo de $8 \Rightarrow 400+50+z$ es múltiplo de 8, como 400 lo es, tenemos que $50+z$ lo será entonces $z=6$.
El número es múltiplo de 9 entonces $1+3+x+y+4+5+6$ es múltiplo de 9 entonces $10+x+y$ es múltiplo de 9; por lo tanto $x+y=18-10=8$ o que $x+y=27-10=17$
El número es múltiplo de 11 entonces $(z+4+x+1)-(5+y+3)$ es múltiplo de 11; por tanto, $(x-y+3=0 \Rightarrow x-y=-3)$ o $(x-y+3=11 \Rightarrow x-y=8)$.
Por lo tanto, se tienen los siguientes casos

$$\begin{cases} \text{x+y} = 8 \\ \text{x-y} = 8 \Rightarrow x=8, y=0 \end{cases}$$

Cuya solución será el número $1380456 = 792 \cdot 1743$.
También,

$$\begin{cases} \text{x+y} = 17 \\ \text{x-y} = 8 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \text{x+y} = 8 \\ \text{x-y} = -3 \end{cases} \text{ y}$$

$$\begin{cases} \text{x+y} = 17 \\ \text{x-y} = -3 \end{cases}$$

los cuales no generan soluciones. Así, la suma $x+y+z=8+0+6=14$.

7. Máximo común divisor

Sean a, b enteros. El máximo común divisor(mcd) de a y b es un número entero d denotado $d = (a, b)$ y definido por:

- $d \geq 0$
- $d|a$ y $d|b$ (se dice que d es un divisor común de a y b).
- Si existe el entero m tal que $m|a$ y $m|b$, entonces $m|d$ (Es decir, si existe otro divisor común de a y b, él divide al máximo común divisor)

PROPIEDADES
Sean a, b, c enteros, entonces se verifican las siguientes propiedades:

1. $(a, b) = 0$ si y sólo si $a = b = 0$.
2. $(a, 1) = 1, (a, 0) = |a|$
3. Ley distrubitiva : $(a.c, b.c) = |c|(a, b)$ (Esta propiedad es la que justifica el método que conocemos para obtener el mcd de dos enteros positivos a y b)
4. $b|a \Rightarrow (a, b) = |b|$

Así, $(60, -24) = 12; (0, 3) = 3; (0, 0) = 0; (1, 5) = 1; (-4, 7) = 1$

Si el máximo común divisor de números enteros es igual a 1, dichos enteros se llaman primos entre sí, primos relativos o coprimos.

8. Mínimo común multiplo

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. EL mínimo común múltiplo (mcm) de a y b es un número entero m denotado $m = [a, b]$ y definido por:

- $m \geq 0$
- $a|m$ y $b|m$ (se dice que m es un múltiplo común de a y b)
- Si existe el entero s tal que $a|s$ y $b|s$, entonces $m|s$ (Es decir, si existe otro múltiplo común de a y b, el mínimo común múltiplo lo divide)

PROPIEDADES
Sean a, b enteros. Entonces:

1. $[a, b] = 0$ sii $(a = 0$ o $b = 0)$
2. $[a, b].(a, b) = |a, b|$ (Relación del mcd y mcm)

EJEMPLOS

1. (Pregunta $N°23$, I Eliminatoria 2014, II Nivel)

   Existe más de un número entero positivo mayor que 1 que cuando se divide por todo entero k con $2 \leq k \leq 11$ su residuo es 1. ¿Cuál es la diferencia entre los dos números más pequeños con esa propiedad?

   a) 2310

   b) 2311

   c) 27720

   d) 27721

   Solución
   Para obtener el menor número que es divisible por cada uno de los números $2, 3, ..., 11$, basta con obtener el mcm que corresponde a $a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ y como el residuo es 1, es de la forma $n = ab + 1$ con b entero positivo. Por lo tanto, los dos enteros menores con la propiedad son 27721 y 55441 y su diferencia es 27720.

2. (Pregunta $N°21$, I Eliminatoria 2015, III Nivel)
   El mayor entero que siempre divide a la expresión $n(n^2 - 1)$, donde n es impar, corresponde a

   a) 6
   b) 12
   c) 24
   d) 48

   Solución
   $n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1) = (n - 1)n(n + 1)$, que es divisible por $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, es decir, $6|n(n^2 - 1)$.
   Por otra parte, como n es impar, entonces $n = 2k + 1$ con k entero.
   $\Rightarrow (2k{+}1{-}1)(2k{+}1)(2k{+}1{+}1) = 2k(2k{+}1)(2k{+}2) = 2k(2k{+}1)2(k{+}1) = 4(2k{+}1)k(k{+}1)$
   Como $k(k + 1)$ es divisible por $1 \cdot 2 = 2$ entonces $k(k + 1) = 2r$ con r entero, es decir, $4(2k + 1)k(k + 1) = 4(2k + 1)2r = 8r(2k + 1) \Rightarrow 8|n(n^2 - 1)$.
   Así, por definición de mínimo común múltiplo $[6, 8] = 24|n(n^2 - 1)$.

3. (Pregunta $N°24$, I Eliminatoria 2010, Nivel B)
El cociente que se obtiene al dividir el mínimo común múltiplo de los primeros 40 números enteros positivos por el mínimo común múltiplo de los primeros 30 números enteros positivos corresponde a:

   a) 1147

   b) 2294

   c) 6882

   d) 44733

   Solución
   Como los primeros 40 números enteros positivos contienen los primeros 30 números enteros positivos, el mcm múltiplo de los primeros 40 es múltiplo de los primeros 30. Sea x el mínimo común múltiplo de los primeros 30 números enteros positivos. Como las únicas potencias de números primos (con exponente entero), que se encuentran entre 30 y 40 son $31 = 31^1, 32 = 2^5$ y $37 = 37^1$, el mínimo común múltiplo de los primeros 40 números enteros positivos es $x \cdot 31 \cdot 2 \cdot 37 = 2294x$ y claramente el cociente que se obtiene al dividir el mínimo común múltiplo de los primeros 40 números enteros positivos por el mínimo común múltiplo de los primeros 30 números enteros positivos corresponde a 2294.

9. Números primos y números compuestos

- Sea n entero positivo; n se llam número positivo si
  1. $n > 1$
  2. Para todo entero positivo d divisor de n, cumple que $d = 1$ o $d = n$.
- Si n es entero positivo, $n > 1$ y n no es número primo, se llama a n número compuesto.

Los números primos menores que 100, son 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89 y 97.

PROPIEDADES
Sean n entero positivo, $n > 1$ y p número primo:

1. El menor número primo es 2 y es además el único número primo par.
2. El menor divisor positivo de n, diferente de 1, es un número primo.
3. Si $p \nmid a$ entonces $(a, p) = 1$

4. Si $p|ab$ entonces $p|a$ o $p|b$

EJEMPLOS

1. (Pregunta $N°19$, I Eliminatoria 2015, II Nivel)
El número entero positivo n es tal que la suma de los cuadrados de sus dígitos es 50 y cada dígito es mayor que el dígito a su izquierda. El producto de los dígitos del menor n que es un número compuesto corresponde a

   a) 7

   b) 25

   c) 36

   d) 48

   Solución
Los cuadrados de los posibles dígitos que suman 50 son $1, 4, 9, 16, 25, 36$ y 49, de los cuales suman 50 los siguientes $1+49$, $25+25$, $9+16+25$ y $1+4+9+36$. Así, los números según la otra condición de los dígitos son 17, 345 y 1236, de donde el producto de los dígitos del menor número compuesto es $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

2. (Pregunta $N°10$, I Eliminatoria 2010, Nivel B)
La cantidad de números primos de la forma $\dfrac{p^2-1}{p+1}$ tales que p es un número primo, corresponde a:

   a) 0

   b) 1

   c) 2

   d) 3

Solución
$\dfrac{p^2-1}{p+1} = \dfrac{(p-1)(p+1)}{p+1} = p-1$. Observe que si p es 2 entonces $p-1=1$ que no es primo y si p es mayor que 3 como la suma o diferencia de impares es un número par entonces $p-1$ es par. Así, es primo solo si $p=3$ pues $p-1=2$ y 2 es el único primo par.

3. (Pregunta $N°24$, I Eliminatoria 2013, III Nivel)
Si un número primo q satisface que $q = p^4 + 3p^2 + 2$ en donde p es un número natural, entonces se puede afirmar que el valor de 2013^{q-1} corresponde a

   a) 0
   b) 1
   c) 2013
   d) 2013^{-1}

   Solución
   Observe que $q = p^4 + 3p^2 + 2 = (p^2+1)(p^2+2)$ así que tenemos solo dos casos, que $p^2+1=1$ por lo tanto $p=0$ o que $p^2+2=1$ donde no existe p. Por lo tanto $q=2$ y con esto $2013^{q-1} = 2013$.

10. Teorema fundamental de la aritmética

Cada entero n, "$n > 1$" se puede expresar como un producto de factores primos de forma única, salvo el orden de los factores. Es decir, n tiene una representación de la forma $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_s$ con p_i para todo $1 \leq i \leq s$ número primo.

OBSERVACIONES
De acuerdo al Teorema Fundamental de la Aritmética ($n > 1$) puede ocurrir que un cierto primo puede aparecer más de una vez. Si los factores primos distintos son $p_1, ..., p_r$ y si el primo p_i aparece a_i veces como factor, podemos escribir $n = p_1^{a1} p_2^{a2} ... p_r^{ar}$ con $a_i > 0$ llamada *descomposición canónica de n en factores.*

EJEMPLOS

1. (Pregunta $N°28$, I Eliminatoria 2013, III Nivel)
Si $6^{y+1} + 6^y \cdot 9 = 3240$ entonces el valor de 3^y, con y un número natural , corresponde a

   a) 3
   b) 9
   c) 27
   d) 81

Solución
Al realizar la descomposición canónica de 3240 obtenemos $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$. Por lo tanto $6^y(6+9) = 2^y \cdot 3^y \cdot 5 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$. Con esto el valor de $3^y = 3^3 = 27$.

2. (Pregunta $N°22$, I Eliminatoria 2015, II Nivel)
Sean a, b, c, d y e números naturales consecutivos cuya suma es un cubo perfecto y $b+c+d$ es cuadrado perfecto. La suma de las cifras del menor c es

   a) 17
   b) 18
   c) 19
   d) 20

Solución

Sean $c-1, c-2, c, c+1, c+2$ los cinco consecutivos. Entonces $c-1+c-2+c+c+1+c+2 = m^3$ con m entero $\Rightarrow 5c = m^3$
$c-1+c+c+1 = n^2$ con n entero $\Rightarrow 3c = n^2$
Así, para que se cumpla, la descomposición canónica de c es $3^\alpha 5^\beta$ y el menor valor de c se obtiene cuando $\alpha = 3$ y $\beta = 2$. Por lo tanto, $c = 3^3 \cdot 5^2 = 675$ y la suma de sus cifras es 18.

PROPIEDAD
Conociendo la descomposición canónica de un entero n positivo podemos obtener mucha información interesante con respecto a los divisores del número. Por ejemplo, el número de los distintos divisores positivos de n viene dado por $(a_1+1) \cdot (a_2+1) \cdot ... \cdot (a_k+1)$.

EJEMPLOS

1. (Pregunta $N°10$, I Eliminatoria 2011, Nivel B)
   La cantidad de parejas de números enteros porsitivos n, m que satisfacen $nm = 3240 + n$, es

   a) 28
   b) 32
   c) 40
   d) 52

   Solución
   Tenemos que $nm = 3240 + n \Rightarrow nm - n = 3240 \Rightarrow n(m-1) = 3240$ y $3240 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$. Hay $4 \cdot 5 \cdot 2 = 40$ divisores de 3240, por lo que hay 40 productos de dos números enteros positivos que producen 3240.

2. (Pregunta $N°23$, I Eliminatoria 2012, Nivel C)
   La cantidad de números naturales de tres o cuatro cifras que tienen exactamente tres divisores positivos es la siguiente

   a) 17
   b) 19
   c) 21
   d) 23

   Solución
   Un número que tiene exactamente tres divisores debe ser el cuadrado de un número primo, y si tiene tres o cuatro cifras debe ser el cuadrado de un número primo mayor que 10 y menor que 100.
   El problema entonces se reduce a contar los números primos desde el 11 hasta el 97: son 21 en total: 11,13,17,17,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89 y 97.

3. (Pregunta $N°13$, I Eliminatoria 2011, Nivel C)
   La cantidad de números enteros positivos de dos dígitos que tiene 12 divisores positivos es

   a) 4
   b) 5
   c) 6
   d) 7

Solución
Si el número n se descompone en factores primos $n = p_1^{a1} \cdot p_2^{a2} \cdot \ldots \cdot p_k^{ak}$ el número de divisores está dado por $(a_1+1)(a_2+1) \cdot \ldots \cdot (a_k+1)$.
Como $10 \leq n \leq 100$, entonces no puede tener más de tres factores primos distintos, $n = p_1^{a1} \cdot p_2^{a2} \cdot p_3^{a3}$, con $(a_1+1) \cdot (a_2+1) \cdot (a_3+1) = 12$.
Como $12 = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 6 \cdot 2 \cdot 1 = 12 \cdot 1 \cdot 1$ se puede tener los casos:
$a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 1; a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = 0; a_1 = 5, a_2 = 1, a_3 = 0; a_1 = 11, a_2 = 0, a_3 = 0$.
El último se debe descartar pues ningún número $n = p^{12}$ es menor que 100.

Caso I:$(a_1 = 2), (a_2 = 1), (a_3 = 1)$ Se puede tener

- $n = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$
- $n = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$
- $n = 3^2 \cdot 2 \cdot 5 = 90$

Caso II:$(a_1 = 3), (a_2 = 2), (a_3 = 0)$
Se tiene

- $n = 2^3 \cdot 3^2 = 72$

Caso III:$(a_1 = 5), (a_2 = 1), (a_3 = 0)$
Se tiene

- $n = 2^5 \cdot 3 = 96$.

Por lo tanto, hay 5 números que cumplen la condición.

11. Ejercicios propuestos

1. (Pregunta $N°16$, I Eliminatoria 2011, Nivel C)
   Considere la lista de los siguientes números $84, 2 \cdot 84, 3 \cdot 84, ..., 59 \cdot 84, 60 \cdot 84$. Entonces, la cantidad de ellos que son múltiplos de 60 es

   a) 12
   b) 15
   c) 18
   d) 30

2. (Pregunta $N°13$, I Eliminatoria 2012, Nivel B)
   La cifra de las unidades del número que resulta de $(5^0 - 2^3)^{2012} - 1974$ corresponde a

   a) 1
   b) 3
   c) 7
   d) 9

3. (Pregunta $N°19$, I Eliminatoria 2015, III Nivel)
   Sea n un entero positivo tal que al dividir a él y a sus dos consecutivos mayores por $2, 5$ y 8 respectivamente, los residuos son 0 y la suma de los cocientes es 12. Entonces la cantidad de enteros que cumplen la condición son

   a) 0
   b) 1
   c) 2
   d) 3

4. (Pregunta $N°17$, I Eliminatoria 2011, Nivel C)
   Pablo eligió tres dígitos distintos no nulos y escribió todos los números de tres dígitos que se pueden forman con ellos sin repetirlos. Si la suma de los tres dígitos es 14, entonces la suma de todos los números formados es

   a) 3108
   b) 3200
   c) 4662
   d) 4800

5. (Pregunta $N°23$, I Eliminatoria 2015, II Nivel)
Sea $abcd$ un número de cuatro dígitos tales que

$$abcd + 7911 = bcda$$

La cantidad de números que cumplen lo anterior es

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3

6. (Pregunta $N°22$, I Eliminatoria 2010, Nivel B)
Se define el reverso de un número de dos cifras como el número que se obtiene permutando las cifras que lo componen (por ejemplo el reverso de 34 es 43). La cantidad de números que sumados a su reverso dan como resultado un cuadrado perfecto es el siguiente:

a) 4
b) 6
c) 8
d) 9

7. (Pregunta $N°22$, I Eliminatoria 2011, Nivel B)
Un número de tres cifras es tal que la suma de los mismos es 9, la cifra de las unidades es el triple del de las decenas y la diferencia que se obtiene restando el número dado y el formado al invertir el orden de las cifras es 198. Entonces, una de las cifras del número es

a) 0
b) 1
c) 2
d) 4

8. (Pregunta $N°5$, I Eliminatoria 2010, Nivel B)
Elodia escribió un número de cuatro dígitos en una hoja pero Seferina derramó la tinta en la hoja y los dos últimos dígitos ya no se pueden ver. Si los dos primeros dígitos del número son 8 y 6, y además se sabe que el número escrito por Elodia era divisible por tres, cuatro y cinco, entonces el total que se obtiene al sumar los dígitos que no se ven corresponde a:

a) 4
b) 7
c) 8
d) 9

9. (Pregunta $N°18$, I Eliminatoria 2011, Nivel B)
   Si el número $12m43n$ (en donde m y n son dígitos) es divisible por 11, entonces el máximo número de valores que puede asumir n corresponde a

   a) nueve
   b) dieciocho
   c) diecinueve
   d) veinte

10. (Pregunta $N°10$, I Eliminatoria 2011, Nivel C)
   Sea n el menor número que al ser dividido por 17, 23 o 29, obtiene como residuo 1. Entonces, la suma de los cocientes al dividir n por 17, 23 y 29 corresponde a

   a) 69
   b) 1551
   c) 11339
   d) 11340

11. (Pregunta $N°4$, I Eliminatoria 2009, Nivel C)
   Dada la expresión $1+(n^2+n)(n^2+5n+6) = 181^2$ donde n es un número entero, entonces el valor de $n(n+3)$ es

   a) -180
   b) -27
   c) 27
   d) 180

12. (Pregunta $N°27$, I Eliminatoria 2013, III Nivel)
   Si la cantidad de divisores de 6^{2013} corresponde a $pq+1$. Entonces el valor de $pq+2013$ corresponde a

   a) 2013^2
   b) $2013 \cdot 2014$
   c) $2013 \cdot 2015$
   d) $2013 \cdot 2016$

12. Soluciones a los ejercicios propuestos

1. Solución
   Para ser múltiplo de 60 los números deben ser de la forma $60 \cdot k$ con k entero y $60 \cdot k = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot k$. Los números anteriores son de la forma $84 \cdot h$ con $h \in \mathbb{Z}$, $1 \leq h \leq 60$ y $84 \cdot h = 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot h$, por lo que para que sean múltiplos de 60 entonces h debe ser de la forma $5m$ con m entero y los números entre 1 y 60 de la forma $5m$ son 12. Por lo tanto, en la lista hay 12 múltiplos de 60.

2. Solución
   $(5^0 - 2^3) = (1 - 8) = (-7)$ y ahora calculemos la cifra de las unidades de $(-7)^{2012}$. Como $(7)^1 = 7, (7)^2 = 49, (7)^3 = 343, (7)^4 = 2401, (7)^5 = 16807...$, entonces después de cada 4 unidades de incremento en el exponente se repiten las cifras de las unidades por lo que al dividir 2012 y 4 el residuo es 0, así la cifra de las unidades de $(-7)^{2012}$ es 1. Y al realizar la resta con el número 1974, el número que resulta tendrá en la cifra de las unidades al 7.

3. Solución
   Los enteros consecutivos son $n + 1$ y $n + 2$. Como $n + 2 = 8k$ con k entero entonces $n = 8k - 2 \Rightarrow n = 2(4k - 1)$ y por el algoritmo de la división k y $4k - 1$ son dos de los cocientes por lo que $k + 4k - 1 = 5k - 1 < 12 \Rightarrow k < \dfrac{13}{5}$ y así al ser n entero positivo $k = 1$ o $k = 2$.
   Si $k = 1, n = 6 \Rightarrow n + 1 = 7$ que no cumple pues no es divisible por 5.
   Si $k = 2, n = 14 \Rightarrow n + 1 = 15$ y $n + 2 = 16$.
   Por lo tanto, solo cumple un entero.

4. Solución
   Sean a, b, c los dígitos elegidos por Pablo. Tenemos que $a+b+c = 14 \Rightarrow 2a+2b+2c = 28$. Así, la suma de cada columna es 28 y utilizando el algoritmo de la suma

$$
\begin{array}{cccc}
 & a & b & c \\
 & a & c & b \\
 & b & a & c \\
 & b & c & a \\
 & c & a & b \\
+ & c & b & a \\
\hline
3 & 1 & 0 & 8
\end{array}
$$

5. Solución
   Como $bcda$ es un número de cuatro cifras, entonces $a = 1$ o $a = 2$.
   Caso 1. Si $a = 1, 1bcd + 7911 = bcd1$ de donde $d = 0$ pues $d + 1$ termina en $1, c = 9$ pues $c + 1$ termina en $d = 0$. Así, $1b90 + 7911 = b901$ y $b = 9$ pues $9 + 1 + b$ termina en 9 y $7 + 1 + 1 = b$. Por lo tanto, $abcd = 1990$.
   Caso 2. Si $a = 2, 2bcd + 7911 = bcd2$ de donde $d = 1$ pues $d + 1$ termina en $2, c = 0$ pues $c + 1$ termina en $d = 1 \Rightarrow 2b01 + 7911 = b012$ y no existe b que cumpla la condición.

Por lo tanto, 1990 es la única solución.

6. Solución
Consideremos un número de dos cifras $ab = 10a + b$, entonces su reverso es $ba = 10b + a$. Sumando el número con su reverso obtenemos $11(a + b)$ de donde $a + b$ debe ser múltiplo de 11 pero como $a < 10$ y $b < 10$ entonces $a + b = 11$. Por lo tanto, hay únicamente 8 números que cumplen las condiciones dadas. Estos son 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 y 92.

7. Solución
Consideremos el número $n = abc$. Tenemos que $a + b + c = 9$ y $3b = c$, por lo que $b = \dfrac{c}{3}$.
Ahora, $abc - cba = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 198$
$\Rightarrow 99(a - c) = 198 \Rightarrow a = c + 2$
Sustituyendo en $a + b + c = 9, (2 + c) + \dfrac{c}{3} + c = 9 \Rightarrow c = 3$
Luego, $3b = 3 \Rightarrow b = 1$ y por último, $a - 3 = 2 \Rightarrow a = 5$. Así una de las cifras es 1.

8. Solución
Como el número escrito por Elodia era divisible por tres, cuatro y cinco, tal número es divisible por 60, por lo que el último dígito del número debe ser un cero. Por la regla de divisibilidad por 3, la suma de los cuatro dígitos del número debe ser múltiplo de 3, por lo que el dígito faltante debe ser 1, 4 ó 7. Pero como el número escrito por Elodia es un múltiplo de 4, el dígito faltante debe ser 4. Así la suma de los dígitos que no se ven es 4.

9. Solución
Como el número es $12m43n$ y es divisible por 11 entonces
$(4 + m) - (6 + n) = 11k$, con $k \in \mathbb{Z}$
$-2 + m - n = 11k$
Construyendo una tabla para determinar los valores de m y n tenemos,

Valores de $m \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$	Valores de $n \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$
0	9
1	Ninguno
2	0
3	1
4	2
5	3
6	4
7	5
8	6
9	7

Por lo que se pueden formar nueve números en total y n puede asumir 9 valores.

10. Solución
    Para obtener el menor número que es divisible por cada uno de ellos, basta con obtener el mcm que corresponde a 11339. Así, $n = 11339 + 1 = 11340$ pues el residuo es 1 y $23 \cdot 29 + 17 \cdot 29 + 17 \cdot 23 = 1551$ corresponde a la suma de los cocientes al dividir n por cada uno de los números dados.

11. Solución
    Dado que $1 + (n^2 + n)(n^2 + 5n + 6) = 181^2$ tenemos que:
    $n(n+1)(n+2)(n+3) = 181^2 - 1$
    $n(n+1)(n+2)(n+3) = (181-1)(181+1)$
    $n(n+1)(n+2)(n+3) = 180 \cdot 182 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$
    Y esto ocurre únicamente si $n = 12$ o $n = -15$, y en ambos casos $n(n+3) = 180$.

12. Solución
    Tenemos que $6^{2013} = 2^{2013} \cdot 3^{2013}$ con esto se tendría $(2013+1)(2013+1) = 2014^2$ divisores.
    Entonces $pq + 1 = 2014^2$ es decir que
    $pq = 2014^2 - 1 = (2014-1)(2014+1) = 2013 \cdot 2015$ entonces
    $pq + 2013 = 2013 \cdot 2015 + 2013 = 2013 \cdot 2016$.

13. Créditos

Este documento es un material de apoyo sobre Teoría de Números para estudiantes que participan en el segundo nivel de la primera eliminatoria de la Olimpiada Costarricense de Matemática.

Autor

Federico Mora Mora.

Editor

Kathya Rivas Medina.

Revisor

Christhian Zamora Jaén.

Para referenciar este documento

Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas (2016). *Material de apoyo sobre Teoría de Números: II nivel, I Eliminatoria.* San José, Costa Rica: autor.