OLIMPIADAS COSTARRICENSES DE MATEMÁTICAS

UNA - UCR - TEC - UNED - MEP - MICITT

Álgebra

$$e^{i\pi} + \phi - \frac{1}{\phi} = 0$$

III Nivel
I Eliminatoria

Marzo 2016

Índice

1. Presentación

Este material de apoyo tiene como objetivo ayudar a la preparación de los estudiantes de Tercer Nivel para la I Eliminatoria de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas en el tema de Álgebra. Se incluyen los contenidos y problemas resueltos de ediciones anteriores. Finalmente, se incluye una sección de ejercicios propuestos.

2. Contenidos

Los contenidos que se evalúan en el tema de Álgebra para el III nivel de la I Eliminatoria de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas son los siguientes:

1. Expresiones algebraicas. Valor numérico de una expresión algebraica. Polinomios. Fórmulas notables $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $(a+b)(a-b)$, $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ y $(a-b)(a^2+ab+b^2)$.
2. Factorización: factor común, inspección, fórmula general, fórmulas notables.
3. Simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias. Racionalización.
4. Ecuaciones e inecuaciones de primer grado. Sistemas de ecuaciones lineales. Ecuaciones de segundo grado.

3. Algunos consejos útiles

- En algunos problemas de valor numérico, es posible que no se conozca el valor particular de las variables. No obstante, es posible que despejando y factorizando se pueda obtener el valor numérico de la expresión; ver por ejemplo los problemas resueltos 1 y 2.
- El Teorema del Factor establece que dado un polinomio $P(x)$, si $P(a)$ es un cero o raíz de P, entonces $P(x) = (x-a)Q(x)$ para algún polinomio $Q(x)$ (es decir, $(x-a)$ es un factor de P).
- Dados dos números reales a y b, si conocemos su suma $a+b$ y y su producto ab, podemos calcular la suma de sus cuadrados a^2+b^2 mediante la primer fórmula notable de la siguiente manera:

  $$(a+b)^2 = (a^2+b^2) + 2ab;$$

  ver el problema 4. De igual manera se puede despejar el producto ab, o se pueden combinar las otras fórmulas notables para obtener diferentes expresiones; ver el problema resuelto 6.

- En algunos casos, expresiones de la forma $a+b\sqrt{c}$ se pueden convertir en fórmulas notables; ver el problema resuelto 9. Por ejemplo, para que $a+b\sqrt{c} = x^2+2xy+y^2$, se puede buscar dos números reales x, y tales que $x^2+y^2 = a$ y $2xy = b\sqrt{c}$.

- Para racionalizar sumas o restas de raíces cuadradas se utiliza la fórmula notable $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$; ver el problema resuelto 11. De igual manera se puede utilizar la fórmula de cubos $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$ para racionalizar sumas o diferencias de raíces cúbicas.

- En una ecuación cuadrática $ax^2+bx+c = 0,\ a \neq 0$, donde $\Delta = b^2-4ac \geq 0$, las raíces x_1 y x_2 vienen dadas por la fórmula general

  $$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},\ x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

  De este hecho se puede deducir que la suma de las raíces es

  $$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

  y el producto

  $$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

  De esta manera, con sólo saber los coeficientes a, b y c de la ecuación cuadrática, podemos deducir que la suma de las dos raíces es $-b/a$ y su producto c/a. Esto corresponde a un caso particular de las llamadas *Fórmulas de Vieta*.

- Con la notación del punto anterior, el trinomio ax^2+bx+c se puede factorizar como

  $$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2),$$

  siempre que $\Delta \geq 0$. Recuerde que si $\Delta < 0$ el trinomio no tiene raíces reales, y si $\Delta = 0$ el trinomio corresponde a un trinomio cuadrado perfecto (primera o segunda fórmula notable).

4. Problemas Resueltos

Tema 1

Expresiones algebraicas. Valor numérico de una expresión algebraica. Polinomios. Fórmulas notables $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $(a+b)(a-b)$, $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ y $(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

1. Si $x^y = 2$, determine el valor numérico de

$$\sqrt{2}\ y + \left(\frac{1}{x}\right)^{-2y} - x^{y/2}\ y$$

(a) 4 (c) $4+\sqrt{2}$

(b) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{4}-\sqrt{2}$

(Pregunta 9, I Eliminatoria 2015, III Nivel)
Solución: Note que a pesar que no se conoce el valor de x o y, podemos calcular

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\ y + \left(\frac{1}{x}\right)^{-2y} - x^{y/2}\ y &= \sqrt{2}\ y + x^{2y} - (x^y)^{1/2}\ y \\ &= \sqrt{2}\, y + (x^y)^2 - \sqrt{x^y}\ y \\ &= \sqrt{2}\, y + (2)^2 - \sqrt{2}\ y \\ &= 4,\end{aligned}$$

donde usamos las propiedades de potencias $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ y $b^{m/n} = \sqrt[n]{b^m}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, y $m, n \in \mathbb{N}$.

2. Sean x, y números reales distintos de cero tales que $x+y = 2(x-y)$. Entonces, el valor numérico de la expresión $\dfrac{x^3+x^2y-y^3}{xy^2}$ es

(a) $\frac{35}{3}$ (c) $\frac{29}{2}$

(b) $\frac{29}{3}$ (d) $\frac{35}{2}$

(Pregunta 24, I Eliminatoria 2011, B Nivel)
Solución: Primero, simplificando la condición $x+y=2(x-y)$ se obtiene que

$$\begin{aligned}&x+y = 2(x-y)\\ \Rightarrow\ &x+y = 2x-2y\\ \Rightarrow\ &x = 3y\end{aligned}$$

Luego, sustituyendo la última igualdad en la expresión que queremos calcular, se concluye que

$$\begin{aligned}\frac{x^3+x^2y-y^3}{xy^2} &= \frac{(3y)^3+(3y)^2y-y^3}{(3y)y^2}\\ &= \frac{27y^3+9y^3-y^3}{3y^3}\\ &= \frac{35y^3}{3y^3}=\frac{35}{3}.\end{aligned}$$

3. Considere el polinomio $P(x)=(x+a)^2-(x+b)^2$ donde a y b son dos números reales distintos. Si k es un número real tal que $P(k)+P(-a)=0$, entonces el valor de k es

(a) $-b$
(b) b
(c) $\dfrac{a-b}{2}$
(d) $\dfrac{a+b}{2}$

(Pregunta 10, I Eliminatoria 2012, B Nivel)
Solución: Primero, intercambiando la x por k, se tiene que

$$\begin{aligned}P(k) &= (k+a)^2-(k+b)^2\\ &= k^2+2ak+a^2-\left(k^2+2bk+b^2\right)\\ &= k^2+2ak+a^2-k^2-2bk-b^2\\ &= 2ak+a^2-2bk-b^2,\end{aligned}$$

donde se utilizó la primer fórmula notable en el primer paso. Del mismo modo, intercambiando ahora k por $-a$, se obtiene

$$\begin{aligned}P(-a) &= 2a(-a)+a^2-2b(-a)-b^2\\ &= -2a^2+a^2+2ab-b^2\\ &= -a^2+2ab-b^2.\end{aligned}$$

Finalmente, como por hipótesis $P(k)+P(-a)=0$, se debe cumplir que

$$\begin{aligned}P(k)+P(-a) &= \left(2ak+a^2-2bk-b^2\right)+\left(-a^2+2ab-b^2\right)\\ &= 2ak-2bk-2b^2+2ab=0.\end{aligned}$$

De esta última ecuación se procede a despejar la variable k:

$$\begin{aligned}
&2ak - 2bk - 2b^2 + 2ab = 0\\
\Rightarrow\ &2ak - 2bk = 2b^2 - 2ab\\
\Rightarrow\ &k(2a - 2b) = 2b^2 - 2ab\\
\Rightarrow\ &k = \frac{2b^2 - 2ab}{2a - 2b}\\
\Rightarrow\ &k = \frac{-2b(-b + a)}{2(a - b)} = \frac{-2b(a - b)}{2(a - b)}\\
\Rightarrow\ &k = -b
\end{aligned}$$

Note que por hipótesis $a \neq b$, lo que permite despejar el valor de k. Si $a = b$, entonces no existe valor de k que satisfaga la condición $P(k) + P(-a) = 0$.

4. Si la suma de dos números es 2 y su producto es -2, entonces la suma de los cuadrados de dichos números corresponde a

   (a) 2
   (b) 4
   (c) 8
   (d) 10

   (Pregunta 21, I Eliminatoria 2015, II Nivel)
   Solución: Sean x, y los dos números. Ellos satisfacen que $x + y = 2$ y $xy = -2$. Por lo tanto, utilizando la primer fórmula notable, se deduce que

$$\begin{aligned}
x + y = 2 &\Rightarrow (x + y)^2 = 4\\
&\Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 4\\
&\Rightarrow x^2 + 2(-2) + y^2 = 4\\
&\Rightarrow x^2 + y^2 = 8.
\end{aligned}$$

Tema 2

Factorización: factor común, inspección, fórmula general, fórmulas notables.

5. La suma de los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide $8cm$ y el área es de $9cm^2$ corresponde a

(a) 10
(b) 17
(c) 18
(d) 64

(Pregunta 20, I Eliminatoria 2015, III Nivel)
Solución: A pesar de ser un problema de geometría, la solución de este problema utiliza factorización con la primer fórmula notable. Para ello, sean a y b la medida de los catetos. Por el teorema de Pitágoras se cumple que $a^2 + b^2 = 8^2$, pues la hipotenusa mide $8cm$. Como el área es de $9cm^2$, se tiene que

$$\frac{a \cdot b}{2} = 9,$$

y así $ab = 18$. Entonces,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 64 \\ \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 &= 64 + 2 \cdot 18 \\ \Rightarrow (a+b)^2 &= 100 \\ \Rightarrow a + b &= 10. \end{aligned}$$

Recuerde que en general $\sqrt{x^2} = |x|, \ x \in \mathbb{R}$, pero en este caso $a + b > 0$ por ser a y b las medidas de los catetos de un triángulo. Por lo tanto, la suma de los dos catetos es $a + b = 10$.

6. Si $x + y = 16$ y $x^3 + y^3 = 1072$, entonces el valor de $x^2 + y^2$ es

(a) 63
(b) 67
(c) 130
(d) 256

Solución: Mediante la factorización de la suma de cubos se puede escribir

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 1072.$$

Como $x + y = 16$, sustituyendo se tiene que

$$16(x^2 - xy + y^2) = 1072 \ \Rightarrow \ x^2 - xy + y^2 = 67.$$

Por otra parte,

$$(x+y)^2 = 16^2 \ \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 256.$$

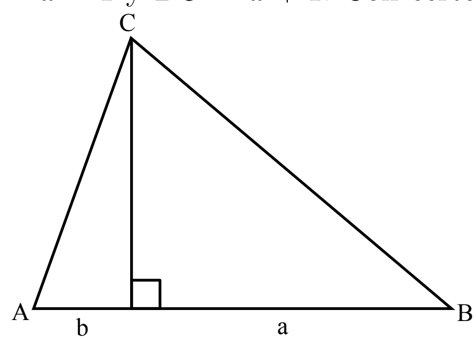
Al restar las dos últimas ecuaciones se deduce que

$$\begin{aligned} (x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - xy + y^2) &= 256 - 67 \\ \Rightarrow 3xy &= 189 \\ \Rightarrow xy &= 63. \end{aligned}$$

Por tanto, sustituyendo el valor de xy

$$\begin{aligned} & x^2 - xy + y^2 = 67 \\ \Rightarrow\ & x^2 - 63 + y^2 = 67 \\ \Rightarrow\ & x^2 + y^2 = 130. \end{aligned}$$

7. En la figura adjunta $AB = x$, $AC = x - 1$ y $BC = x + 1$. Con certeza $a - b$ es



   (a) 1

   (b) 2

   (c) 4

   (d) 5

(Pregunta 12, I Eliminatoria 2015, II Nivel)
Solución: Con base en el teorema de Pitágoras, el cuadrado de la altura h del triángulo ABC mostrada en el dibujo es igual a

$$\begin{aligned} & h^2 = (x+1)^2 - a^2 = (x-1)^2 - b^2 \\ \Rightarrow\ & (x+1)^2 - (x-1)^2 = a^2 - b^2 \\ \Rightarrow\ & [(x+1) + (x-1)][(x+1) - (x-1)] = (a+b)(a-b) \\ \Rightarrow\ & 4x = (a+b)(a-b), \end{aligned}$$

donde utilizamos la factorización de diferencias de cuadrados. Luego, dado que $AB = x = a + b$, se concluye que $4 = a - b$.

8. Uno de los factores que se obtiene al factorizar el polinomio $9x^4y^6 - 24x^2y^3z + 7z^2$ es

   (a) $3x^2y^3 + 5z$
   (b) $3x^2y^3 + 4z$
   (c) $3x^2y^3 + 7z$
   (d) $3x^2y^3 - z$

   (Pregunta 23, I Eliminatoria 2014, III Nivel)
   Solución: Para factorizar el polinomio, primero separamos el tercer término del polinomio como $7z^2 = 16z^2 - 9z^2$. De esta manera, mediante la primer fórmula notable se obtiene

$$\begin{aligned} 9x^4y^6 - 24x^2y^3z + 7z^2 &= (9x^4y^6 - 24x^2y^3z + 16z^2) - 9z^2 \\ &= (3x^2y^3 - 4z)^2 - 9z^2 \\ &= (3x^2y^3 - 4z - 3z)(3x^2y^3 - 4z + 3z) \\ &= (3x^2y^3 - 7z)(3x^2y^3 - z). \end{aligned}$$

   Así, $3x^2y^3 - z$ es uno de los factores del polinomio.

9. La expresión $\sqrt{42 + 2\sqrt{41}} - \sqrt{41}$ es equivalente a

   (a) 0
   (b) 1
   (c) $\sqrt{41}$
   (d) $2\sqrt{41}$

   (Pregunta 25, I Eliminatoria 2014, II Nivel)
   Solución: Recuerde que $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$. Considerando el número irracional $42 + 2\sqrt{41}$, podemos reescribirlo como

$$42 + 2\sqrt{41} = 41 + 2\sqrt{41} + 1,$$

   y tomando $a = \sqrt{41}$ y $b = 1$ en la fórmula notable, se deduce

$$42 + 2\sqrt{41} = \left(\sqrt{41}\right)^2 + 2 \cdot \sqrt{41} \cdot 1 + 1^2 = \left(\sqrt{41} + 1\right)^2.$$

   Por lo tanto

$$\begin{aligned} \sqrt{42 + 2\sqrt{41}} - \sqrt{41} &= \sqrt{\left(\sqrt{41} + 1\right)^2} - \sqrt{41} \\ &= \left|\sqrt{41} + 1\right| - \sqrt{41} \\ &= \sqrt{41} + 1 - \sqrt{41} = 1. \end{aligned}$$

Tema 3

Simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias. Racionalización.

10. Al efectuar $\left(b-\dfrac{1}{b}\right)\div\dfrac{b+1}{b^2}-\dfrac{1}{b^{-2}}$ se obtiene

(a) 1

(b) b

(c) -1

(d) $-b$

(Pregunta 3, I Eliminatoria 2015, II Nivel)
Solución: Se deduce que

$$\begin{aligned}\left(b-\frac{1}{b}\right)\div\frac{b+1}{b^2}-\frac{1}{b^{-2}} &= \frac{b^2-1}{b}\cdot\frac{b^2}{b+1}-b^2\\ &= \frac{(b+1)(b-1)}{b}\cdot\frac{b^2}{b+1}-b^2\\ &= (b-1)\,b-b^2\\ &= b^2-b-b^2\\ &= -b.\end{aligned}$$

11. La expresión $\dfrac{2x^2-8}{1-\sqrt{x-1}}$ es equivalente a

(a) $(x+4)\left(1+\sqrt{x-1}\right)$

(b) $(x-4)\left(1-\sqrt{x-1}\right)$

(c) $2(x-2)\left(1-\sqrt{x-1}\right)$

(d) $-2(x+2)\left(1+\sqrt{x-1}\right)$

(Pregunta 6, I Eliminatoria 2015, II Nivel)
Solución: Multiplicando por el conjugado del denominador se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{2x^2-8}{1-\sqrt{x-1}} &= \frac{2x^2-8}{1-\sqrt{x-1}}\cdot\frac{1+\sqrt{x-1}}{1+\sqrt{x-1}}\\ &= \frac{2(x^2-4)(1+\sqrt{x-1})}{1-(x-1)}\\ &= \frac{2(x-2)(x+2)(1+\sqrt{x-1})}{2-x}\\ &= -2(x+2)(1+\sqrt{x-1}).\end{aligned}$$

12. Al efectuar $\dfrac{\left(\dfrac{4a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)^{-1}}{\left(\dfrac{4a}{b}-4+\dfrac{b}{a}\right)^{-1}}$ se obtiene como resultado

(a) 1

(b) -1

(c) $\dfrac{2a-b}{2a+b}$

(d) $\dfrac{2a+b}{2a-b}$

(Pregunta 13, I Eliminatoria 2015, II Nivel)
Solución: Realizando las operaciones con fracciones se deduce que

$$\frac{\left(\dfrac{4a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)^{-1}}{\left(\dfrac{4a}{b}-4+\dfrac{b}{a}\right)^{-1}} = \frac{\dfrac{4a}{b}-4+\dfrac{b}{a}}{\dfrac{4a}{b}-\dfrac{b}{a}} = \frac{\dfrac{4a^2-4ab+b^2}{ab}}{\dfrac{4a^2-b^2}{ab}}$$
$$= \frac{(2a-b)^2}{(2a-b)(2a+b)} = \frac{2a-b}{2a+b}.$$

Tema 4

Ecuaciones e inecuaciones de primer grado. Sistemas de ecuaciones lineales. Ecuaciones de segundo grado.

13. El cuadrado de la solución de la ecuación

$$x\sqrt{7}+\sqrt{8-3\sqrt{7}}-\sqrt{8+3\sqrt{7}}=0$$

corresponde a

(a) 2

(b) 4

(c) $\sqrt{2}$

(d) $\sqrt{7}$

(Pregunta 1, I Eliminatoria 2015, III Nivel)

Solución:

$$\begin{aligned}
& x\sqrt{7}+\sqrt{8-3\sqrt{7}}-\sqrt{8+3\sqrt{7}}=0 \\
\Rightarrow\ & x\sqrt{7}=\sqrt{8+3\sqrt{7}}-\sqrt{8-3\sqrt{7}} \\
\Rightarrow\ & 7x^2=\left(8+3\sqrt{7}\right)+\left(8-3\sqrt{7}\right)-2\sqrt{\left(8+3\sqrt{7}\right)\cdot\left(8-3\sqrt{7}\right)} \\
\Rightarrow\ & 7x^2=16-2\cdot\sqrt{64-63}=14 \\
\Rightarrow\ & x^2=2
\end{aligned}$$

14. Siendo m y n constantes reales, el valor que NO debe tomar el parámetro α para que el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x-3y=n \\ \alpha x+4y=m \end{cases}$$

tenga una única solución (x,y) es

(a) $\dfrac{3}{8}$

(b) $\dfrac{8}{3}$

(c) $\dfrac{-3}{8}$

(d) $\dfrac{-8}{3}$

(Pregunta 13, I Eliminatoria 2015, III Nivel)
Solución: De la primer ecuación se tiene que

$$x=\frac{n+3y}{2}.$$

Sustituyendo en la segunda ecuación se obtiene

$$\begin{aligned}
& \alpha\left(\frac{n+3y}{2}\right)+4y=m \\
\Rightarrow\ & \alpha n+3\alpha y+8y=2m \\
\Rightarrow\ & y=\frac{2m-\alpha n}{3\alpha+8}.
\end{aligned}$$

Luego, $y\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 3\alpha+8\neq 0$, por lo que α no puede tomar el valor $\dfrac{-8}{3}$ si se quiere una única solución. Dicha solución es $\left(\dfrac{4n+3m}{3\alpha+8},\dfrac{2m-\alpha n}{3\alpha+8}\right)$.

15. La solución de la inecuación $-5 \leq \dfrac{-4-3x}{2} < 10$ es:

(a) $]-8,2]$

(b) $[-8,2[$

(c) $]-2,8]$

(d) $]-2,8[$

(Pregunta 19, I Eliminatoria 2014, II Nivel)
Solución: Tenemos que

$$\begin{aligned}
&-5 \leq \frac{-4-3x}{2} < 10\\
\Rightarrow\ &-5 \cdot 2 \leq -4-3x < 10 \cdot 2\\
\Rightarrow\ &4-10 \leq -3x < 4+20\\
\Rightarrow\ &\frac{-6}{-3} \geq x > \frac{24}{-3}\\
\Rightarrow\ &2 \geq x > -8.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $x \in]-8,2]$.

16. La ecuación $x^2 - x + m^2 - 2mx = 2 + 2m$ tiene dos soluciones reales distintas para cualquier valor de m que cumpla con la siguiente condición

(a) $m < -\dfrac{3}{4}$

(b) $m > -\dfrac{3}{4}$

(c) $m \geq -21$

(d) $m < -21$

(Pregunta 8, I Eliminatoria 2013, III Nivel)
Solución: Note que la ecuación se puede reescribir como

$$x^2 - x(1+2m) + (m^2 - 2m - 2) = 0.$$

Para tener dos soluciones reales distintas debe cumplirse que el discriminante es positivo. Esto es

$$\begin{aligned}
&\Delta = b^2 - 4ac > 0\\
\Rightarrow\ &[-(1+2m)]^2 - 4(m^2 - 2m - 2) > 0\\
\Rightarrow\ &1 + 4m + 4m^2 - 4m^2 + 8m + 8 > 0\\
\Rightarrow\ &12m + 9 > 0\\
\Rightarrow\ &m > -\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

5. Ejercicios Propuestos

1. Si $x > 1$, la expresión

$$\sqrt{(x-1)(x^2+1)}\,\sqrt{(x+1)(x^4+1)+\frac{1}{x^3-x^2+x-1}}$$

es equivalente a

(a) x^2

(b) x^4

(c) x^6

(d) x^8

(Pregunta 11, I Eliminatoria 2015, III Nivel)

2. Al simplificar la expresión $\dfrac{\sqrt{2}(4+\sqrt{7})}{(1+\sqrt{7})\sqrt{4+\sqrt{7}}}$ se obtiene como resultado

(a) 1

(b) 4

(c) $1+\sqrt{7}$

(d) $4+\sqrt{7}$

(Pregunta 18, I Eliminatoria 2015, III Nivel)

3. Si $P(x)$ es un polinomio tal que -3 y 5 son dos de sus ceros, entonces, con certeza se puede asegurar que un factor del polinomio $Q(x) = P(x) + (x^2-9)(x+5)$ es

(a) $x+3$

(b) $x-5$

(c) $x-3$

(d) $x+5$

4. Sean a, b, x, y números reales tales que $xy = b$ y $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2} = a$. El valor de $(x+y)^2$ es

(a) $(a+2b)^2$

(b) $b(ab+2)$

(c) $\dfrac{1}{a}+2b$

(d) $ab(b+2)$

(Pregunta 19, I Eliminatoria 2014, III Nivel)

5. El número $\dfrac{\sqrt{5}\left(\sqrt{9+4\sqrt{5}}+\sqrt{9-4\sqrt{5}}\right)}{2}$ es

(a) irracional

(b) racional no entero

(c) entero no natural

(d) natural

(Pregunta 10, I Eliminatoria 2014, III Nivel)

6. Si a y b son dos números reales positivos distintos tales que $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=3$ entonces el valor de $\dfrac{a+b}{a-b}$ es

(a) $\sqrt{2}$

(b) $\sqrt{3}$

(c) 2

(d) $\sqrt{5}$

(Pregunta 17, I Eliminatoria 2014, III Nivel)

7. Si $x^2+y^2+z^2=xy+xz+yz$ entonces la expresión

$$\sqrt[7]{\frac{x^8+y^8+z^8}{(x+y+z)^8}}+\sqrt[8]{\frac{x^9+y^9+z^9}{(x+y+z)^9}}+\sqrt[9]{\frac{x^{10}+y^{10}+z^{10}}{(x+y+z)^{10}}}$$

es igual a

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 4

(Pregunta 25, I Eliminatoria 2014, III Nivel)

8. Al efectuar la división

$$(a^{98}-1)\div\left[a^7(a^{49}-a^{42}+1)-1\right]$$

¿Cuántos términos tiene el polinomio cociente?

(a) 5

(b) 6

(c) 7

(d) 8

(Pregunta 24, I Eliminatoria 2015, III Nivel)

9. La expresión $\dfrac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \dfrac{2a\sqrt{b}-2b\sqrt{a}}{a-b}$ es equivalente a

   (a) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

   (b) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

   (c) $a+b$

   (d) $a-b$

   (Pregunta 10, I Eliminatoria 2015, II Nivel)

10. Encuentre el resultado de la siguiente suma:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

   (a) 7

   (b) 8

   (c) 9

   (d) 10

   (Pregunta 16, I Eliminatoria 2008, B Nivel)

11. Si a y b son números reales tales que $ab = 2$, y si x, y, a, b satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{a} = -1 \\ \dfrac{x}{b} - \dfrac{y}{a} = 2 \end{cases}$$

   Entonces el valor de xy es

   (a) $-\dfrac{2}{3}$

   (b) $\dfrac{3}{2}$

   (c) $-\dfrac{3}{2}$

   (d) $\dfrac{2}{3}$

   (Pregunta 12, I Eliminatoria 2013, III Nivel)

12. Una solución de la ecuación $a(x-1) = \frac{2bx}{x+1}$, con $a, b \in \mathbb{R}$ constantes diferentes de cero, es

   (a) $\dfrac{b - \sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

   (b) $\dfrac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}$

   (c) $\dfrac{b - \sqrt{a^2 + b^2}}{b}$

   (d) $\dfrac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a}$

   (Pregunta 25, I Eliminatoria 2013, C Nivel)

6. Soluciones de los Ejercicios Propuestos

1. **Solución:** (Pregunta 11, I Eliminatoria 2015, III Nivel) Factorizando el denominador del último término, y multiplicando ambas raíces mediante la fórmula notable de diferencia de cuadrados, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-1)(x^2+1)}\, \sqrt{(x+1)(x^4+1) + \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1}} \\
&= \sqrt{(x-1)(x^2+1)}\, \sqrt{(x+1)(x^4+1) + \frac{1}{(x-1)(x^2+1)}} \\
&= \sqrt{(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1) + 1} \\
&= \sqrt{(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1) + 1} \\
&= \sqrt{(x^4-1)(x^4+1) + 1} \\
&= \sqrt{x^8 - 1 + 1} = x^4
\end{aligned}$$

2. **Solución:** (Pregunta 18, I Eliminatoria 2015, III Nivel) Racionalizando obtene-

mos:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}(4+\sqrt{7})}{\sqrt{4+\sqrt{7}}(1+\sqrt{7})} &= \frac{\sqrt{2}(4+\sqrt{7})}{\sqrt{4+\sqrt{7}}(1+\sqrt{7})} \cdot \frac{\sqrt{4+\sqrt{7}}}{\sqrt{4+\sqrt{7}}}\\
&= \frac{\sqrt{2}\sqrt{4+\sqrt{7}}}{(1+\sqrt{7})}\\
&= \frac{\sqrt{8+2\sqrt{7}}}{(1+\sqrt{7})}\\
&= \frac{\sqrt{1+2\sqrt{7}+7}}{(1+\sqrt{7})}\\
&= \frac{\sqrt{(1+\sqrt{7})^2}}{(1+\sqrt{7})}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

3. **Solución:** Como -3 y 5 son dos ceros del polinomio $P(x)$, entonces P se puede escribir de la forma

$$P(x) = (x+3)(x-5)R(x),$$

para algún polinomio $R(x)$. Por tanto, como $Q(x) = P(x) + (x^2-9)(x+5)$, sustituyendo $P(x)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
Q(x) &= (x+3)(x-5)R(x) + (x^2-9)(x+5)\\
&= (x+3)(x-5)R(x) + (x+3)(x-3)(x+5)\\
&= (x+3)\left[(x-5)R(x) + (x-3)(x+5)\right],
\end{aligned}$$

y así $(x+3)$ es un factor de $Q(x)$.

4. **Solución** (Pregunta 19, I Eliminatoria 2014, III Nivel) Completando cuadrados, se tiene que

$$\begin{aligned}
a = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} &= \frac{1}{x^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2} - \frac{2}{xy}\\
&= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 - \frac{2}{xy}\\
&= \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2 - \frac{2}{xy}\\
&= \frac{(x+y)^2}{(xy)^2} - \frac{2}{xy}\\
&= \frac{(x+y)^2}{b^2} - \frac{2}{b}.
\end{aligned}$$

Entonces $(x+y)^2 = b^2\left(a+\frac{2}{b}\right) = b(ab+2)$.

5. **Solución** (Pregunta 10, I Eliminatoria 2014, III Nivel) Primero, note que

$$\sqrt{9+4\sqrt{5}} = \sqrt{4+2\cdot 2\cdot\sqrt{5}+5} = \sqrt{(2+\sqrt{5})^2} = 2+\sqrt{5}.$$

De manera similar $\sqrt{9-4\sqrt{5}} = |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{9+4\sqrt{5}}+\sqrt{9-4\sqrt{5}}\right)}{2} &= \frac{\sqrt{5}\left((2+\sqrt{5})+(\sqrt{5}-2)\right)}{2}\\ &= \frac{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}}{2} = 5.\end{aligned}$$

Por lo tanto el número es natural.

6. **Solución** (Pregunta 17, I Eliminatoria 2014, III Nivel) La ecuación $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=3$ es equivalente a

$$a^2+b^2 = 3ab.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 &= \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}\\ &= \frac{a^2+b^2+2ab}{a^2+b^2-2ab}\\ &= \frac{3ab+2ab}{3ab-2ab}\\ &= \frac{5ab}{ab} = 5.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\dfrac{a+b}{a-b} = \sqrt{5}$.

7. **Solución** (Pregunta 25, I Eliminatoria 2014, III Nivel) Si se multiplica la ecuación $x^2+y^2+z^2 = xy+xz+yz$ por 2 a cada lado, se obtiene

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2 = 0.$$

Como cada sumando es mayor o igual a cero, se debe cumplir que

$$x-y = y-z = x-z = 0,$$

y así $x = y = z$. De esta manera

$$
\begin{aligned}
&\sqrt[7]{\frac{x^8+y^8+z^8}{(x+y+z)^8}} + \sqrt[8]{\frac{x^9+y^9+z^9}{(x+y+z)^9}} + \sqrt[9]{\frac{x^{10}+y^{10}+z^{10}}{(x+y+z)^{10}}} \\
&= \sqrt[7]{\frac{x^8+x^8+x^8}{(x+x+x)^8}} + \sqrt[8]{\frac{x^9+x^9+x^9}{(x+x+x)^9}} + \sqrt[9]{\frac{x^{10}+x^{10}+x^{10}}{(x+x+x)^{10}}} \\
&= \sqrt[7]{\frac{3x^8}{(3x)^8}} + \sqrt[8]{\frac{3x^9}{(3x)^9}} + \sqrt[9]{\frac{3x^{10}}{(3x)^{10}}} \\
&= \sqrt[7]{\frac{1}{3^7}} + \sqrt[8]{\frac{1}{3^8}} + \sqrt[9]{\frac{1}{3^9}} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

8. **Solución:** (Pregunta 24, I Eliminatoria 2015, III Nivel) Primero, al simplificar la expresión se obtiene

$$
\begin{aligned}
(a^{98}-1) \div \left[a^7(a^{49}-a^{42}+1)-1\right] &= \frac{(a^{49}-1)(a^{49}+1)}{a^{56}-a^{49}+a^7-1} \\
&= \frac{(a^{49}-1)(a^{49}+1)}{(a^{49}+1)(a^7-1)} \\
&= \frac{a^{49}-1}{a^7-1}.
\end{aligned}
$$

Sustityuendo $b = a^7$, se sigue que debemos efectuar la división

$$\frac{b^7-1}{b-1} = b^6+b^5+b^4+b^3+b^2+b+1.$$

Por lo tanto

$$\frac{a^{49}-1}{a^7-1} = a^{42}+a^{35}+a^{28}+a^{21}+a^{14}+a^7+1.$$

9. **Solución:** (Pregunta 10, I Eliminatoria 2015, II Nivel) Racionalizando se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{2a\sqrt{b}-2b\sqrt{a}}{a-b} &= \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{2a\sqrt{b}-2b\sqrt{a}}{a-b}\\
&= \frac{a\sqrt{a}-a\sqrt{b}+b\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b}+\frac{2a\sqrt{b}-2b\sqrt{a}}{a-b}\\
&= \frac{a\sqrt{a}+a\sqrt{b}-b\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b}\\
&= \frac{a(\sqrt{a}+\sqrt{b})-b(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}\\
&= \frac{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}.
\end{aligned}$$

10. **Solución:** (Pregunta 16, I Eliminatoria 2008, B Nivel) Cada término de la suma se puede racionalizar, para obtener

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} &= \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}\\
&= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{n-(n+1)}\\
&= -\sqrt{n}+\sqrt{n+1},
\end{aligned}$$

para $1\leq n\leq 99$. De esta manera, la suma inicial se convierte en

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}\\
&=(-\sqrt{1}+\sqrt{2})+(-\sqrt{2}+\sqrt{3})+(-\sqrt{3}+\sqrt{4})+\cdots+(-\sqrt{99}+\sqrt{100})\\
&=-\sqrt{1}+\sqrt{100}=-1+10=9.
\end{aligned}$$

11. **Solución:** (Pregunta 12, I Eliminatoria 2013, III Nivel) Elevando al cuadrado cada ecuación se obtiene

$$\begin{cases}
\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{2xy}{ab}=1\\[2ex]
\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{2xy}{ab}=4
\end{cases}$$

Restando ambas ecuaciones se obtiene

$$\frac{4xy}{ab}=-3,$$

por lo que

$$xy = -\frac{3ab}{4} = -\frac{3 \cdot 2}{4} = -\frac{3}{2}.$$

12. **Solución:** (Pregunta 25, I Eliminatoria 2013, C Nivel) Note que la ecuación es equivalente a $a(x-1)(x+1) = 2bx$, $x \neq -1$. Multiplicando y agrupando se obtiene la ecuación cuadrática

$$ax^2 - 2bx - a = 0,$$

cuyas soluciones vienen dadas por la fórmula general

$$x = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 + 4a^2}}{2a} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + a^2}}{a}.$$

7. Créditos

Este documento es un material de apoyo sobre Álgebra para estudiantes que participan en el tercer nivel de la primera eliminatoria de las Olimpiada Costarricenses de Matemáticas.

Autor

Juan Gabriel Calvo.

Editor

Juan Gabriel Calvo.

Revisor

Leonardo Coto Mora

Para referenciar este documento

Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas (2016). *Material de apoyo sobre Álgebra: III nivel, I Eliminatoria.* San José, Costa Rica: autor.