OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

UNA - UCR - TEC - UNED - MEP - MICIT

Geometría

III Nivel

I Eliminatoria

Marzo 2016

Índice

1. Presentación.

El presente material pretende ser una guía para el estudiante que participa en la Olimpiada Costarricense de Matemática en el III Nivel, que corresponde únicamente a estudiantes de décimo año de colegio en adelante . Con él se busca que el estudiante conozca el tipo de problemas a los que se va a enfrentar en la I Eliminatoria de esta olimpiada.

En la siguiente sección se presenta el temario completo de geometría, para tener una visión global de los contenidos que debe manejar para resolver los ejercicios de esta eliminatoria en el Nivel III. Posteriormente se desglosan estos temas y se hace un resumen de los conceptos matemáticos más relevantes del temario; además se ofrece una serie de ejercicios, tomados de las primeras eliminatorias de años anteriores, de modo que se observe cómo se aplican dichos conceptos a problemas concretos.

Finalmente se presenta una lista de ejercicios adicionales para que pueda poner en práctica los conceptos estudiados. Se incluyen las soluciones de estos ejercicios, pero se recomienda tratar de resolverlos antes de consultar la solución.

2. Temario

Los siguientes son los temas sobre los que se elaborarán las preguntas de la Primera Eliminatoria.

1. Desigualdad triangular. Teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo y cuadrilátero convexo. Teorema de la medida del ángulo externo de un triángulo. Teorema de la suma de los ángulos externos de un triángulo y cuadrilátero convexo. Clasificación de triángulos de acuerdo con la medida de sus ángulos internos o a la medida de sus lados. Ejes cartesianos. Representación de puntos y figuras.

2. Área y perímetro de triángulos, cuadriláteros y círculo. Fórmula de Herón.

3. Rectas notables en un triángulo. Propiedades de las rectas notables en un triángulo. Congruencia de triángulos. Teorema de Pitágoras. Proporcionalidad. Teorema de Tales. Semejanza de triángulos.

4. Razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo. Razones trigonométricas de los ángulos especiales $30°, 45°, 60°$.

5. Problemas de aplicación (ángulos de elevación y de depresión, entre otros). Ley de los senos y ley de los cosenos. Resolución de triángulos.

   Algunas de las notaciones más utilizadas son las siguientes:

$\overline{AB}$: Segmento de recta que va de A a B
$\overrightarrow{AB}$: Rayo que empieza en A y pasa por B
$\overleftrightarrow{AB}$: Recta definida por A y B
$A - B - C$: Puntos colineales con B entre A y C
$l \parallel m$: La recta l es paralela a la recta m
$l \perp m$: La recta l es perpendicular a la recta m

3. Teorema de Pitágoras

Teorema (Pitágoras): Sea $\triangle ABC$ recto en C, entonces $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Teorema (Derivado de Pitágoras):Si $\overline{CD}$ es la altura sobre la hipotenusa entonces

1. $CD^2 = AD \cdot BD$.

2. $AC^2 = AD \cdot AB$.

3. $BC^2 = BD \cdot AB$.

Ejemplo 1. (Pregunta N° 7, I Eliminatoria 2014, III Nivel)

Sea $\triangle ABC$ rectángulo en $\angle C$ y D un punto en $\overline{AB}$ tal que $\overline{CD}$ es altura. Si $AD = 3$ y $DB = 12$, entonces la medida de $\overline{CD}$ es

(a) 6

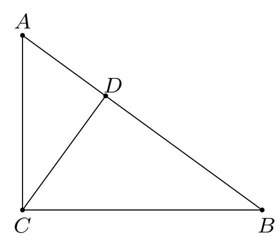
(b) $3\sqrt{5}$

(c) $6\sqrt{2}$

(d) $6\sqrt{5}$

Solución

Considere al figura



Utilizando teorema de pitágoras en el $\triangle ABC$ se tiene que $AC^2 + CB^2 = AB^2 \Rightarrow AC^2 + CB^2 = 15^2$.

Sea h la medida de CD, entonces por pitágoras en el $\triangle CDA$ tenemos $AD^2 + h^2 = AC^2$ y en el $\triangle CDB$ se tiene $DB^2 + h^2 = CB^2$.

Ahora sumando miembro a miembro $AD^2 + h^2 + DB^2 + h^2 = AC^2 + CB^2 \Rightarrow 3^2 + 2h^2 + 12^2 = 15^2 \Rightarrow 2h^2 = 72 \Rightarrow h^2 = 36 \Rightarrow h = 6$.
Otra forma para resolver este ejercicio es aplicando un teorema derivado del teorema de Pitágoras. Tomando la primera parte de este teorema se tiene que $CD^2 = 3 \cdot 12 \;\Rightarrow\; CD = \sqrt{36} \;\Rightarrow\; CD = 6$
$\therefore$ La solución correcta es la (a).

Ejemplo 2. (Pregunta N° 21, I Eliminatoria 2013, III Nivel)

Considere un punto P en el interior de un triángulo acutángulo ABC tal que el triángulo APC es rectángulo. Con certeza se cumple que

A) $AB \cdot AP + BC \cdot PC > AC^2$

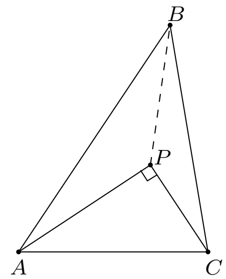
B) $AB \cdot AP + BC \cdot PC < AC^2$

C) $AB^2 + BC^2 = AC^2$

D) $AB^2 + BC^2 > AC^2$

Solución

Tenemos una representación de triángulo similar al siguiente:



Observe que por el teorema de Pitágoras se tiene que $AP^2 + PC^2 = AC^2$.

$m\angle APB + m\angle BPC + \angle APC = 360 \Rightarrow m\angle APB + m\angle BPC = 270$.

Como P pertenece al interior del $\triangle ABC$ entonce $m\angle APB < 180$ y $m\angle BPC < 180$ y entonces $90 < m\angle APB < 180$ y $m\angle BPC < 180$, así en el $\triangle APB$ se tiene que $AB > AP$ y en el $\triangle BPC$ se tiene que $BC > PC$

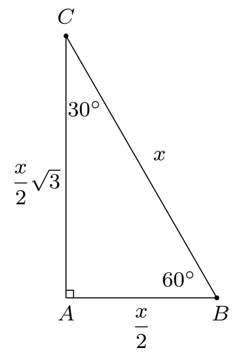
Así que $AB \cdot AP + AC \cdot PC > AC^2$, descartando la opción B.

Ahora la opción C no se cumple dado que no corresponden a ternas pitagóricas, pues son medidas de lados de un triángulo acutángulo. Y por último la opción A es incorrecta pues la desigualdad que se cumple corresponde a $AB \cdot AP + BC \cdot PC > AC^2$.
Finalmente como $m\angle ABC < 90$ entonces $AB^2 + BC^2 > AC^2$.

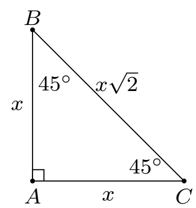
$\therefore$ La solución correcta es la (d).

4. Triángulos Especiales

Teorema: Dado un triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos miden $30°$ y $60°$, entonces la longitud del cateto que se opone al ángulo menor es la mitad de la longitud de la hipotenusa y la longitud del cateto que se opone al águlo mayor es la mitad de la longitud de la hipotenusa multiplicado por $\sqrt{3}$.



Teorema: Dado un triángulo rectángulo isósceles, entonces la longitud de la hipotenusa es igual a la longitud de los catetos multiplicados por $\sqrt{2}$.



Ejemplo 3. (Pregunta $N°$ 14, I Eliminatoria 2014, III Nivel)

Sea el $\triangle ABC$ equilátero de lado 3, y sean D, E, F puntos en $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ respectivamente tales que $AD = BE = CF = 1$, determine el perímetro del $\triangle DEF$

(a) 9

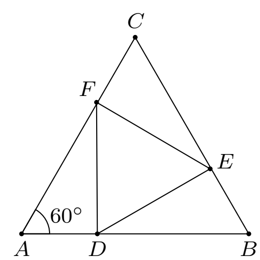
(b) 6

(c) $\sqrt{3}$

(d) $3\sqrt{3}$

Solución

Considere la figura:



Considere el $\triangle ADF$, dado que $AF = 2$, $AD = 1$ y $m\angle CAB = 60°$ entonces $\triangle ADF$ es un triángulo rectángulo especial (conocido como semiequilátero) y de esa forma $DF = \sqrt{3}$.
De forma análoga $FE = ED = \sqrt{3}$ y entones el perímetro del $\triangle DEF$ es $3\sqrt{3}$
$\therefore$ La solución correcta es la (d).

Ejemplo 4. (Pregunta $N°$ 14, I Eliminatoria 2013, III Nivel)

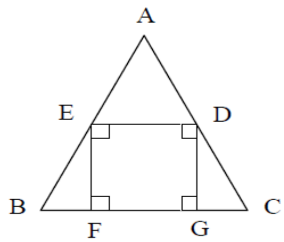
La medida del perímetro del tríangulo equilátero $\triangle ABC$ que se representa en la figura adjunta es de $36cm$. Entonces el área en centímetros cuadrados del cuadrado $\square DEFG$ corresponde a

A) $\dfrac{2\sqrt{3}+12}{15}$

B) $\dfrac{12\sqrt{3}+9}{5}$

C) $144(2\sqrt{3}-3)^2$

D) $6+(\sqrt{3}-1)^2$



Solución

Como los triángulos $\triangle EBF$ y $\triangle DGC$ son semiequiláteros $(30°, 60°, 90°)$, si se define x: lado del cuadrado $\square DEFG$, se cumple que,

$BF = GC = \dfrac{x}{\sqrt{3}} = \dfrac{x\sqrt{3}}{3}$

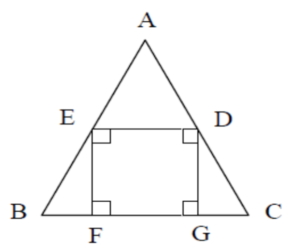
entonces como,

$BC = \dfrac{36cm}{3} = 12cm$ y

$\dfrac{x\sqrt{3}}{3} + x + \dfrac{x\sqrt{3}}{3} = 12$

$x\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+1\right) = 12$

$x\left(\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}\right) = 12$



$$x = \frac{12\cdot 3}{2\sqrt{3}+3} = \frac{36}{2\sqrt{3}+3}\cdot\frac{2\sqrt{3}-3}{2\sqrt{3}-3} = \frac{36(2\sqrt{3}-3)}{12-9} = 12(2\sqrt{3}-3)cm$$

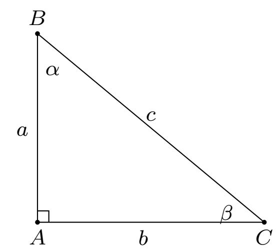
Entonces el área del cuadrado $\square DEFG$ es,

$$A_{Cuadrado} = x^2 = 12^2(2\sqrt{3}-3)^2cm^2 = 144(2\sqrt{3}-3)^2cm^2$$

$\therefore$ Por lo que la opción correcta es (c).

5. Trigonometría

Para un triángulo rectángulo se pueden defiinir tres relaciones entre sus lados y sus ángulos. Consideremos la siguiente figura:



Así tenemos que la seno es igual a la razón entre el cateto que se opone (opuesto) al ángulo y la hipotenusa.

$$\sin\alpha = \frac{b}{c}; \quad \sin\beta = \frac{a}{c}$$

De la misma forma coseno es igual a la razón entre el cateto adyacente al ángulo y la hipotenusa.

$$\cos\alpha = \frac{a}{c}; \quad \cos\beta = \frac{b}{c}$$

Finalmente la tangente es iguala a la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente al águlo.

$$\tan\alpha = \frac{b}{a}; \quad \tan\beta = \frac{a}{b}$$

De las relaciones anteriores es claro que:

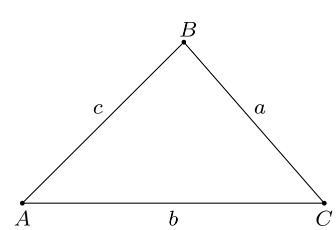
1. $\sin\alpha = \cos\beta$

2. $\sin\beta = \cos\alpha$

3. $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

4. $\tan\beta = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}$

Además existen relaciones que se pueden aplicar a cuales quiera triángulos llamadas ley de senos y ley de cosenos. Considere la siguiente figura:



Ley de senos: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

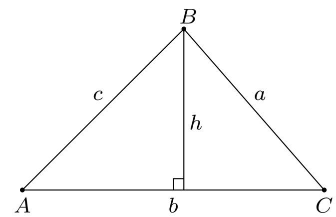
Ley de cosenos

1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

2. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

3. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

Además se puede determinar el área del triángulo mediante trigonometría. Considere la siguiente figura



Notemos en el triángulo rectángulo de la izquierda que $\sin A = \dfrac{h}{c}$ entoces $c \cdot \sin A = h$

Ahora se tiene que $a(\triangle ABC) = \dfrac{1}{2}\, b \cdot h$ y sustituyendo obtenemos $a(\triangle ABC) = \dfrac{1}{2}\, b \cdot c \cdot \sin A$.
Se puede proceder de forma análoga con los otros lados (siempre que el ángulo sea agudo).

Ejemplo 5. (Pregunta N° 20, I Eliminatoria 2013, III Nivel)

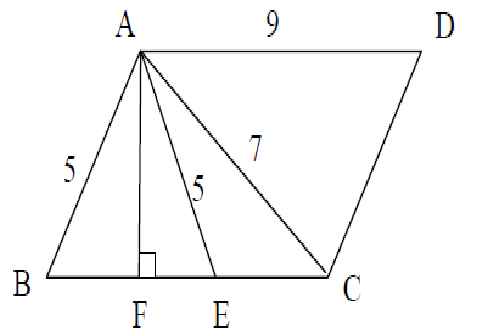
Consideremos el siguiente paralelogramo $ABCD$ de la figura adjunta, cuyos lados miden 5 y 9. Si se supone que $AE = 5$ y $AC = 7$, entonces el valor de EC es igual a

A) $\frac{8}{3}$

B) 4

C) 6

D) 16



Solución

Aplicando ley de cosenos al triángulo ABC tenemos

$$AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B = AC^2 \Rightarrow 25 + 81 - 90\cos B = 49 \Rightarrow 30\cos B = 19 \Rightarrow \cos B = \frac{19}{30}$$

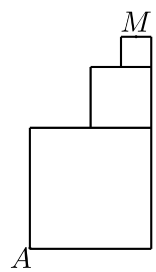
Como $AB = AE = 5$ y $\overline{AF} \perp \overline{BC}$ se sigue que $BE = 2BF$, aplicando trigonometría en el $\triangle ABF$ se tiene que $5\cos B = BF$ y así $BF = \frac{19}{6}$. Por último, se tiene que $AD = BC = 9$ por ser un $\square ABCD$ un paralelogramo y así $EC = BC - 2BF = 9 - \frac{19}{3} = \frac{8}{3}$
$\therefore$ Por lo que la opción correcta es (a).

6. Ejercicios adicionales.

A continuación se presenta una lista de ejercicios, tomados de ediciones anteriores de la Olimpiada Costarricense de Matemática, en los cuales se aplican los conceptos desarrollaos en este documento. Se recomienda tratar de resolverlos antes de consultar las soluciones dadas en el capítulo 8.

Pregunta $N°5$, I Eliminatoria 2014, III Nivel.

1. Se colocan tres cuadrados como se muestra en la figura adjunta, en los cuales la medida de los lados son $4x$, $2x$ y x respectivamente. Si A representa un vértice del cuadrado de mayor longitud y M el punto medio del lado del cuadrado de menor longitud, entonces la longitud del segmento $\overline{AM}$ en términos de x corresponde a



   (a) $3\sqrt{5}x$
   (b) $\dfrac{7\sqrt{5}x}{2}$
   (c) $\dfrac{9\sqrt{5}x}{2}$
   (d) $5\sqrt{5}x$

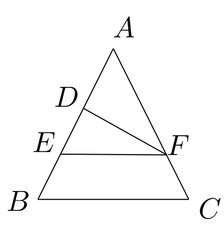
   Pregunta $N°7$, I Eliminatoria 2014, III Nivel.

2. Sea $\triangle ABC$ rectángulo en $\angle C$ y D un punto en $\overline{AB}$ tal que $\overline{CD}$ es altura. Si $AD = 3$ y $DB = 12$, entonces la medida de $\overline{CD}$ es

   (a) 6
   (b) $3\sqrt{5}$
   (c) $6\sqrt{2}$
   (d) $6\sqrt{5}$

   Pregunta $N°9$, I Eliminatoria 2014, III Nivel.

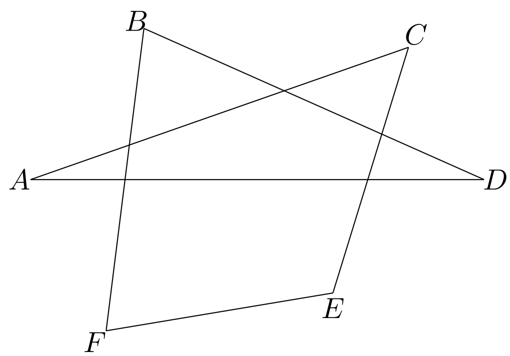
3. En la figura adjunta $\triangle ABC$ es equilátero de lado 3. Si $BE = DA = FC = 1$, entonces la medida del $\angle DFE$ corresponde a



(a) $10°$
(b) $15°$
(c) $30°$
(d) $45°$

Pregunta $N°20$, I Eliminatoria 2014, III Nivel.

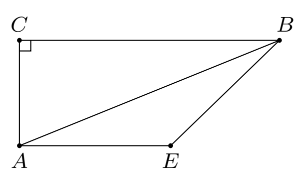
4. Si la suma de las medidas en grados de los ángulos A, B, C, D, E, F de la figura es $90n$ entonces el valor de n corresponde a



(a) 3
(b) 4
(c) 5
(d) 6

Pregunta $N°4$, I Eliminatoria 2015, III Nivel.

5. En el trapecio $AEBC$ hay un ángulo recto en C, mientras que $\overline{AE}$ mide igual que $\overline{BE}$. Si sabemos que las medidas de $\overline{AC}, \overline{CB}$ y $\overline{AE}$ son $6cm, 8cm$ y $5\sqrt{2}cm$, respectivamente, entonces la mediana de AEB, trazada desde E, mide



a) $5cm$
b) $5\sqrt{2}cm$
c) $10cm$
d) $10\sqrt{2}cm$

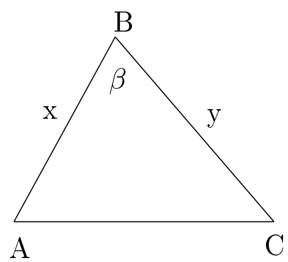
Pregunta $N°6$, I Eliminatoria 2015, III Nivel.

6. La razón entre las longitudes de las diagonales de un rombo es de $3:4$. Si la suma de las medidas de dichas diagonales es de 56 unidades lineales entonces el perímetro del rombo es de

   a) 80
   b) 96
   c) 100
   d) 108

   Pregunta $N°8$, I Eliminatoria 2015, III Nivel.

7. En la siguiente figura, si $AB = x$, $BC = y$ y $m\angle ABC = \beta$ entonces el área del $\triangle ABC$ es

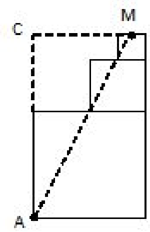


   a) $\dfrac{xy}{2}\operatorname{sen}\beta$
   b) $\dfrac{xy}{2}\cos\beta$
   c) $2xy\operatorname{sen}\beta$
   d) $2xy\cos\beta$

7. Solución a los ejercicios adicionales.

Solución $N°5$, I Eliminatoria 2014, III Nivel.

Considerando la figura dada tenemos,
Aplicando el Teorema de Pitágoras se tiene que,



$AC = 4x + 2x + x = 7x$
$CM = 2x + x + \frac{x}{2} = \frac{7}{2}x$
$CM^2 + AC^2 = AM^2$
$(AM)^2 = \left(\frac{7}{2}x\right)^2 + (7x)^2$
$AM = \sqrt{\frac{49}{4}x^2 + 49x^2} = \sqrt{\frac{5 \cdot 49}{4}x^2} = \frac{7\sqrt{5}}{2}x$

Solución $N°7$, I Eliminatoria 2014, III Nivel.

Utilizando teorema de pitágoras $AC^2 + CB^2 = AB^2 \Rightarrow AC^2 + CB^2 = 15^2$. Sea h la medida de CD, entonces por pitágoras $AD^2 + h^2 = AC^2$ y $DB^2 + h^2 = CB^2$.Sumando miembro a miembro $AD^2 + h^2 + DB^2 + h^2 = AC^2 + CB^2 \Rightarrow 3^2 + 2h^2 + 12^2 = 15^2 \Rightarrow 2h^2 = 72 \Rightarrow h^2 = 36 \Rightarrow h = 6$.

Solución $N°9$, I Eliminatoria 2014, III Nivel.

Observe que $AE = AB - BE = 2$ y $AF = AC - FC = 2$, así $\triangle AEF$ es isósceles y como $\angle A = 60^0$, entonces $\triangle AEF$ es equilátero. Ahora, $AF = FE$ y $DA = DE = 1$, por criterio $l - l - l$ $\triangle FAD \cong \triangle FED$ por lo que $\angle DFA \cong \angle DFE$ y DF es bisectriz del $\angle AFE$. Por lo tanto, $\angle DFE = \frac{60}{5} = 30$.

Solución $N°20$, I Eliminatoria 2014, III Nivel.

Sean P y Q las intersecciones de $\overline{AD}$ con $\overline{BF}$ y $\overline{EC}$ respectivamente. Si se denota $\angle P = \angle FPQ$ y $\angle Q = \angle EQP$, dado que la suma de los ángulos internos del cuadrilátero $EFPQ$ es 360°, y la suma de los tres ángulos internos en cada uno de los triángulos DPB y AQC es 180° obtenemos las siguientes tres ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\angle F + \angle P + \angle Q + \angle E &= 360° \\
\angle B + (180° - \angle P) + \angle D &= 180° \\
\angle C + (180° - \angle Q) + \angle A &= 180°
\end{aligned}$$

Si se suman estas tres ecuaciones se obtiene que $90n = \angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle R + \angle F = 360°$, y así, $n = 4$.

Solución $N°4$, I Eliminatoria 2015, III Nivel.

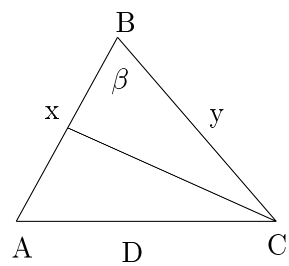
Usando Pitágoras en el ABC tenemos que $AB = 10$. Como el $\triangle AEB$ es isósceles, la mediana desde E es también un segmento de mediatriz, por lo que parte $\triangle AEB$ en dos triángulos rectángulos, donde, usando Pitágoras otra vez, vemos que el segmento buscado mide 5.

Solución $N°6$, I Eliminatoria 2015, III Nivel.

Como la razón es de 3 : 4, podemos decir que las diagonales miden $3d$ y $4d$. Por lo tanto, $3d + 4d = 56 \Rightarrow d = 8$. Como la mitad de cada diagonal forma un triángulo rectángulo con cada lado ℓ, tenemos que $12^2 + 16^2 = \ell^2 \Rightarrow \ell = 20$. Por lo que el perímetro es 80.

Solución $N°8$, I Eliminatoria 2015, III Nivel.

Considere la siguiente figura en la que se ha trazado la altura sobre $\overline{AB}$



Sea h la altura desde C.

Se tiene que $sen\beta = \dfrac{h}{y}$, por lo que $h = ysen\beta$.

Entonces

$$A = \frac{x \cdot h}{2} = \frac{x \cdot ysen\beta}{2} = \frac{xy}{2}sen\beta$$

8. Créditos

Este documento es un material de apoyo sobre Teoría de Números para estudiantes que participan en el primer nivel de la primera eliminatoria de la Olimpiada Costarricense de Matemática.

Autor
Alexánder Hernández Quirós

Editor
Alexánder Hernández Quirós

Revisor
Luis Felipe Barquero Jiménez

Para referenciar este documento
Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas (2016). *Material de apoyo sobre Geometría: III nivel, I Eliminatoria.* San José, Costa Rica: autor.