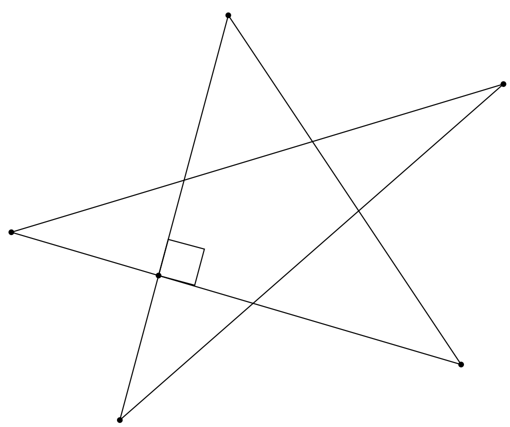
XXVIII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

UNA - UCR - TEC - UNED - MEP - MICITT

SOLUCIÓN PRIMERA ELIMINATORIA NACIONAL



I Nivel

7°

2016

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemática 2016 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas y le desea los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 25 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del viernes 1 de julio, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

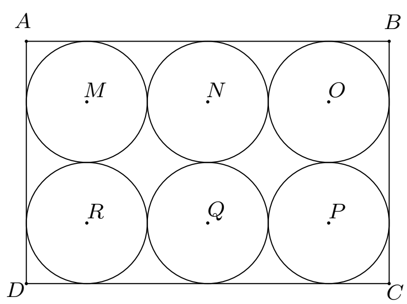
1. Yesenia quiere cortar una tela de 312 cm de largo y 88 cm de ancho en cuadrados lo más grandes posibles y del mismo tamaño cada uno. La cantidad de cuadrados que puede recortar sin que le sobre tela es

   (a) 64
   (b) 390
   (c) 429
   (d) 704

   - Opción correcta: c)
   - Solución:
     Dado que el máximo común divisor de 312 y 88 es 8, se tiene que la longitud del lado de cada uno de los cuadrados es 8cm. Luego el área de cada uno de estos cuadrados es $8^2 = 64$ y el área total de la tela es $312 \cdot 88 = 27456$. Por lo tanto la cantidad de cuadrados del mismo tamaño que se pueden cortar es $27456 \div 64 = 429$.

2. En la figura se muestran 6 círculos iguales de centros M, N, O, P, Q, R inscritos en el rectángulo $ABCD$. Si se sabe que el perímetro del rectángulo $MOPR$ es 60 cm, entonces el perímetro, en centímetros, del $\square ABCD$ es

   (a) 80
   (b) 100
   (c) 120
   (d) 140



   - Opción correcta: b)
   - Solución: Como el rectángulo $\square MOPR$ está formado por 12 radios de los círculos iguales, entonces cada uno mide $60 : 12 = 5$.
     Ahora, la longitud del largo del rectángulo $\square ABCD$ es equivalente a 6 radios y el ancho a 4 radios por lo que el perímetro es $2 \cdot 6 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 5 = 60 + 40 = 100$ cm.

3. La cantidad de números de tres dígitos, donde el dígito de las centenas es el doble del dígito de las unidades y la suma de sus dígitos es 12, corresponde a

   (a) 2
   (b) 4
   (c) 6
   (d) 8

- Opción correcta: b)
- Solución:

  Sea $n = abc$ un número que cumpla las condiciones pedidas. Como el dígito de las centenas es el doble del de las unidades, c puede tomar los valores $1, 2, 3, 4$. Por lo tanto, tenemos cuatro números diferentes: $2b1$, $4b2$, $6b3$ y $8b4$. Además, como la suma de los dígitos es 12, con cada uno de estos cuatro números se encuentra un valor para b, así los números que cumplen las condiciones son 4: 291, 462, 633 y 804

4. En una urna se tienen tres bolas blancas, seis bolas amarillas, dos bolas negras y cuatro bolas moradas. Si todas las bolas son del mismo peso y tamaño y se saca una bola al azar, la probabilidad de que dicha bola sea blanca o amarilla es

   (a) $\frac{4}{5}$

   (b) $\frac{3}{5}$

   (c) $\frac{2}{5}$

   (d) $\frac{1}{5}$

- Opción correcta: b)
- Solución:

  En total hay 15 bolas, 9 bolas entre blancas y amarillas.

  Así, la probabilidad es $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.

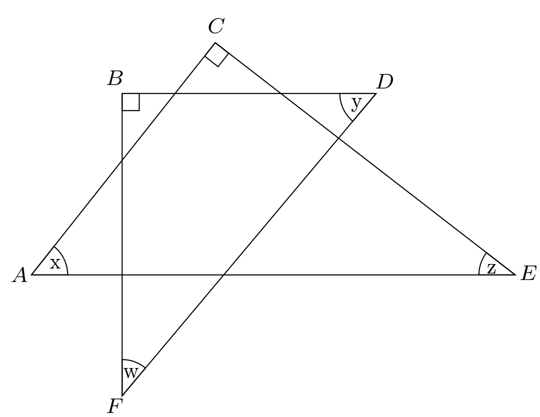
5. En la figura adjunta $\overline{AC} \parallel \overline{FD}$, $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$, $\overline{BD} \perp \overline{BF}$ y $\overline{AC} \perp \overline{CE}$. Entonces $x + y + z + w$ es

   a) $90°$

   b) $180°$

   c) $270°$

   d) $360°$



- Opción correcta: b)
- Solución:

Por el teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo, en $\triangle ACE$, $x + z = 90°$, y en $\triangle BDF$, $y + w = 90°$ Por lo tanto, $x + y + z + w = 180°$

6. Una cocina eléctrica, con dos discos encendidos consume 120 colones al estar encendidos por 3 horas. El gasto, en colones, si se encienden los 4 discos por 2 horas corresponde a

   (a) 120
   (b) 140
   (c) 160
   (d) 180

   - Opción correcta: c)
   - Solución: Primero, los dos discos consumen 40 colones por hora, y entonces 4 discos gastan 80 colones por hora. Así, en dos horas el gasto llega a ser 160 colones.

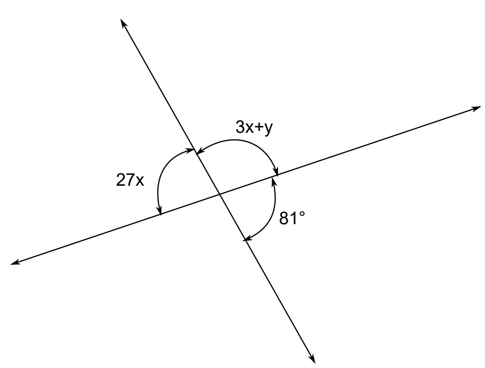
7. En un colegio, se sabe que $\frac{40}{71}$ de los estudiantes tienen ojos café, $\frac{8}{213}$ tienen cabello rubio y $\frac{3}{8}$ son hombres . La cantidad mínima de estudiantes que puede tener el colegio es

   (a) 568
   (b) 1704
   (c) 5112
   (d) 120984

   - Opción correcta: b)
   - Solución:
     El mínimo número de estudiantes viene dado por el mínimo común múltiplo de $213, 71$ y 8, y este es 1704.

8. De acuerdo con los datos de la figura, se puede asegurar que

   (a) x es mayor que y
   (b) y es igual que x
   (c) x es menor que y
   (d) y es el doble de x



- Opción correcta: c)
- Solución:

  Por ser ángulos adyacentes y suplementarios, $81° + 3x + y = 180°$; también se cumple por este motivo que $27x + 3x + y = 180°$.

  Así, $81° + 3x + y = 27x + 3x + y \Rightarrow 81° = 27x \Rightarrow x = 3°$.

  Con $x = 3°$ se tiene que $81° + 3 \cdot 3° + y = 180° \Rightarrow y = 90°$.

  Con los valores de x y y se tiene que el único enunciado verdadero es que x es menor que y.

9. Un número es olcómico si sus cifras son solamente 1 y 2. La cantidad de números olcómicos de 5 cifras donde el 1 aparece más veces que el 2 corresponde a

   (a) 16

   (b) 18

   (c) 20

   (d) 32

- Opción correcta: a)
- Solución:

  Como 5 es impar y los números solo tienen las cifras 1 y 2, entonces siempre habrán más dígitos de una cifra que de la otra y del total van a ser la mitad los que tengan más dígitos de una cifra. Ahora, como cada dígito tiene dos posibilidades y son 5 en total, entonces hay $2^5 = 32$ números olcómicos y la mitad de ellos es 16.

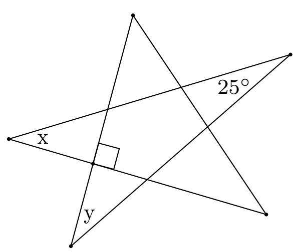
10. De acuerdo con los datos de la figura, el valor de $x + y$ es

    (a) 45°

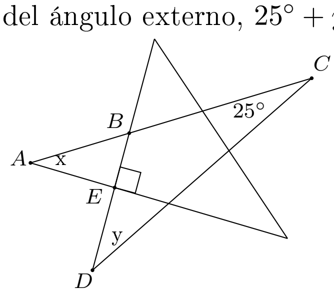
    (b) 50°

    (c) 65°

    (d) 90°



- Opción correcta: c)
- Solución: En $\triangle ABE$, $m\angle ABE = 90° - x$. Entonces, en $\triangle BCD$, por el teorema de la medida del ángulo externo, $25° + y = 90° - x$ de donde $x + y = 90° - 25° = 65°$.



11. Nicole y Sara tienen cada una un dado de seis caras numeradas del 1 al 6. Si los lanzan al aire al mismo tiempo y suman los números de las caras superiores, entonces la probabilidad de que la suma obtenida sea 6 es

   (a) $\dfrac{1}{6}$
   (b) $\dfrac{1}{9}$
   (c) $\dfrac{1}{12}$
   (d) $\dfrac{5}{36}$

   - Opción correcta: d)
   - Solución:
     Todos los eventos posibles se representan en la siguiente tabla.

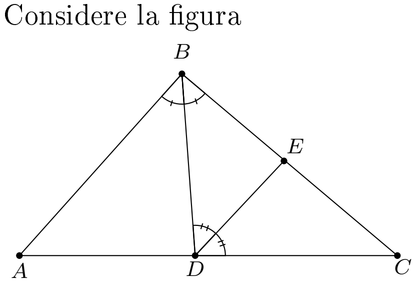
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

     Como se observa en la tabla anterior hay 5 formas diferentes de obtener una suma igual a 6. Por lo tanto la posibilidad de obtener una suma igual a 6 es $\dfrac{5}{36}$.

12. Sea el $\triangle ABC$ tal que $m\angle BAC = 48°$ y $m\angle BCA = 40°$. Sea D un punto tal que $A - D - C$ y $\overline{BD}$ biseca al $\angle ABC$. Sea E un punto tal que $B - E - C$ y $\overline{DE}$ biseca al $\angle BDC$. Entonces $m\angle DEC$ corresponde a

   (a) 47°
   (b) 86°
   (c) 92°
   (d) 93°

   - Opción correcta: d)
   - Solución:
     Considere la figura



$m\angle ABC = 180° - m\angle BCA - m\angle BAC \Rightarrow m\angle ABC = 92°$

ahora $m\angle ABD = m\angle DBC = \dfrac{1}{2} m\angle ABC = 46°$ ($\overline{BD}$ biseca $\angle ABC$)

$m\angle DEC = m\angle BDE + m\angle EBD = m\angle BDE + 46°$ (ángulo externo al $\triangle BDE$)

$m\angle EDC = m\angle BDE$

$m\angle DEC + m\angle BCA + m\angle EDC = 180 \Rightarrow m\angle BDE + 46° + 40° + m\angle BDE = 180$

Así $m\angle BDE = 47°$ y $m\angle DEC = 93°$.

13. La cantidad de números múltiplos de 6, de tres dígitos, tales que la suma de sus dígitos es 24 corresponde a

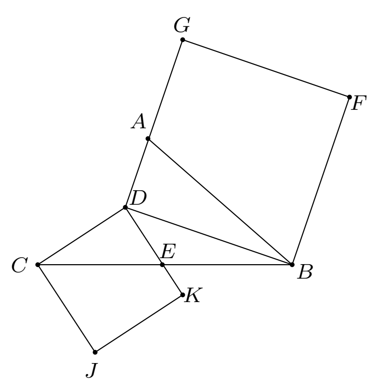
  (a) 4
  (b) 6
  (c) 8
  (d) 12

- Opción correcta: a)
- Solución:
  Dado que el número es múltiplo de 6 lo será también de 2 y 3. El hecho de que el número sea múltiplo de tres coincide con la propiedad de que la suma de sus dígitos sea 24.
  Como el número es par hay cinco posibilidades para el dígito de las unidades: 0, 2, 4, 6, 8.
  - El dígito de las unidades no puede ser 0, 2 o 4. Esto porque de ser así la suma de los otros dos dígitos deberían ser 24, 22 y 20 respectivamente, lo cual es imposible.
  - El dígito de las unidades es 6. En este caso la suma de los otros dos dígitos es 18. Solo hay un número de tres cifras con estas características: 996.
  - El dígito de las unidades es 8. Ahora los otros dos dígitos deben sumar 16. Hay tres números con estas características: 888, 978 y 798.

  En total hay cuatro números de tres dígitos que cumplen las condiciones del problema.

14. En la figura el $\square DBFG$ y el $\square DKJC$ son cuadrados de áreas 16 y 9 respectivamente. Si $AD = DE = 2$, el área del $\square ABCD$ es 10, entonces el área del $\triangle EDB$ corresponde a

  (a) 1
  (b) 2
  (c) 3
  (d) 4



- Opción correcta: $c)$
- Solución:
  $(ABCD) = (CDE) + (ADB) + (EDB)$

  $\implies \; 10 = (CDE) + (ADB) + (EDB)$

  $\implies \; 10 - (CDE) - (ADB) = (EDB)$

  Ahora $\triangle CDE$ y $\triangle ADB$ son triángulos rectángulos entonces
  $(CDE) = 3$ y $(ADB) = 4$.

  Y así $(EDB) = 3$

15. La cantidad de números de la forma $a356b$, donde a y b son dígitos, que son divisibles por 72 es

    (a) 1
    (b) 2
    (c) 3
    (d) 4

- Opción correcta: $b)$
- Solución:
  Note que $72 = 9 \cdot 8$. Además 8 y 9 son coprimos. Por lo tanto el número dado debe ser divisible por 8 y por 9 a la vez.
  De acuerdo con la regla de divisibilidad por 9, la suma de los dígitos del número debe ser dibisible por 9, es decir, $a + 3 + 5 + 6 + b = 14 + a + b$ debe ser divisible por 9.
  Por otra parte, según la regla de divisibilidad por 8, las últimas tres cifras del número deben ser divisibles por 8, esto es, $56b$ es divisible por 8. Para que esto se cumpla $b = 0$ o $b = 8$.
  Si $b = 0$ entonces $14 + a + b = 14 + a$. Dado que $14 + a$ debe ser divisible por 9 se tiene que $a = 4$.
  Si $b = 8$ entonces $14 + a + b = 22 + a$. Dado que $22 + a$ debe ser divisible por 9 se tiene que $a = 5$.
  En conclusión hay dos números que cumplen las condiciones del problema. Los números son 43560 y 53568.

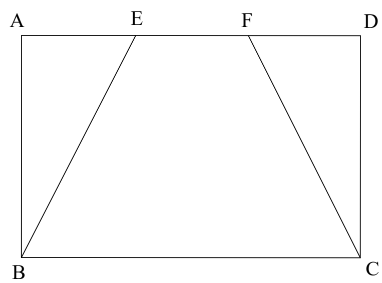
16. Considere el rectángulo $ABCD$. Si los puntos E y F están sobre $\overline{AD}$ tales que $AE = EF = FD$, entonces la razón del área del trapecio $BEFC$ y el área del rectángulo $ABCD$ es

(a) $\frac{1}{2}$

(b) $\frac{2}{3}$

(c) $\frac{1}{3}$

(d) $\frac{3}{4}$



- Opción correcta: b)
- Solución:
  Si $x = BC = AD$ y $y = AB = CD$, el área del rectángulo está dada por xy y el área del trapecio está dada por $\dfrac{(x+\frac{x}{3})y}{2} = \dfrac{\frac{4x}{3}y}{2} = \frac{4xy}{6} = \frac{2}{3}xy$; es decir, dos terceras partes del área del rectángulo.

17. Pablo escribe todos los números enteros desde el 1 hasta el 30 en la pizarra y borra algunos de ellos de manera que de los números restantes no haya ninguno que sea el doble de otro. La máxima cantidad de números que NO fueron borrados es

(a) 15

(b) 19

(c) 20

(d) 21

- Opción correcta: c)
- Solución:
  Para obtener la mayor cantidad de números deben estar los números impares, los impares multiplicados por 4 menores que 30 y los impares multiplicados por 16 menores que 30, es decir, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 4, 12, 20, 28 y 16. Por lo tanto, la máxima cantidad de números que pueden quedar es 20.

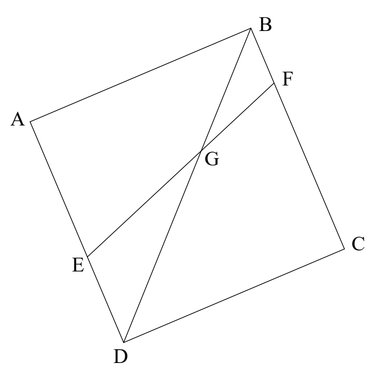
18. Considere el cuadrado $ABCD$ en el que E y F son puntos sobre los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, respectivamente. Si G es el punto de intersección de $\overline{EF}$ y $\overline{BD}$, y se sabe que $m\angle AEF = 70°$, entonces $m\angle EGD$ es

(a) 15°

(b) 20°

(c) 25°

(d) 30°



- Opción correcta: c)
- Solución:
  $m\angle GED = 110°$ pues este ángulo es suplementario con $\angle AEG$. Como $\overline{BD}$ es una diagonal del cuadrado, $m\angle EDG = 45°$.
  Luego, en el triángulo EDG se tiene que $m\angle EGD + 110° + 45° = 180° \Rightarrow m\angle EGD = 25°$.

19. La cantidad de divisores de 2016, que a su vez NO son múltiplos de 9, es

    (a) 12
    (b) 24
    (c) 28
    (d) 36

- Opción correcta: b)
- Solución:
  La factorización de 2016 es $2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Por lo tanto, el total de divisores de 2016 es $6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$. Debemos excluir los que son múltiplos de 9, que en total son $6 \cdot 2 = 12$. Así, 24 es la respuesta.

20. Juan está en la U y tiene solo cinco camisas distintas para los días en que asiste a clases (de lunes a viernes). Si utiliza una camisa diferente cada día, el número de formas distintas que puede usar Juan las camisas en los días lectivos es

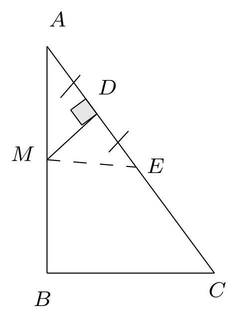
    (a) 120
    (b) 100
    (c) 48
    (d) 24

- Opción correcta: a)
- Solución:
  Son cinco camisas distintas para cinco días distintos:
  Lunes: 5 opciones
  Martes: 4 opciones
  Miércoles: 3 opciones
  Jueves: 2 opciones
  Viernes: 1 opción
  Así, las posibilidades son $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

21. Sea el $\triangle ABC$ recto en B, M punto medio de $\overline{AB}$ y D, E puntos tales que $A - D - E - C$, $AD = DE$ y $\overline{MD} \perp \overline{AC}$. Si $m\angle BAC = 20°$, entonces la $m\angle BEC$ corresponde a

(a) 140°
(b) 90°
(c) 70°
(d) 40°

- Opción correcta: b)
- Solución: Considere la figura



Trazamos $\overline{ME}$, $\triangle MDA \cong \triangle MDE(L-A-L)$ así $m\angle AEM = 20°$

$m\angle AMD = m\angle DME = 70°$ y $AM = ME = MB$

$\triangle BME$ es isósceles con $BM = ME$ y así $m\angle MEB = m\angle MBE$

$2m\angle MEB = 140°$ (ángulo externo) así $m\angle MEB = 70°$

$m\angle BEC = 180° - m\angle MEB - m\angle MEA = 90°$

$\therefore m\angle BEC = 90°$

22. A una primera eliminatoria de I Nivel de OLCOMA llegaron a realizar el examen 600 estudiantes, los cuales corresponden al 75 % de los estudiantes que se esperaba que llegaran a realizar la prueba. De los estudiantes que hicieron la prueba, 30 % corresponde a estudiantes de zonas alejadas. Si se esperaban 250 estudiantes de zonas alejadas, el porcentaje de los estudiantes de zonas alejadas que llegó a realizar la prueba es

(a) 25

(b) 28

(c) 72

(d) 75

- Opción correcta: c)

- Solución:

  600 corresponde con 75 % de los que se esperaban. Si x representa la cantidad de estudiantes que se esperaban, entonces $\dfrac{x}{100\,\%} = \dfrac{600}{75\,\%} \Rightarrow x = \dfrac{100\,\% \cdot 600}{75\,\%} = 800$.

  Así, se esperaban 800 estudiantes. De los 600 que llegaron, 30 % son de zonas alejadas; por lo que los estudiantes de zonas alejadas que realizaron el examen es $30\,\% \cdot 600 = 180$.

  Como se esperaban 250 estudiantes de zonas alejadas y llegaron 180, el porcentaje de los de zonas alejadas que hicieron el examen es $\dfrac{180 \cdot 100\,\%}{250} = 72\,\%$

23. Los dos últimos dígitos del número 7^{2016} corresponden a

    (a) 01

    (b) 07

    (c) 43

    (d) 49

    - Opción correcta: a)
    - Solución:

      Observe que al ir calculando las potencias los últimos dígitos terminan en 07, 49, 43 y 01. Por el algoritmo de la división cada potencia de 7 termina en los dígitos anteriores, si los residuos al dividir al exponente por 4 son respectivamente 1, 2, 3 y 0. Como 2016 tiene residuo 0 al dividir por 4 entonces 7^{2016} termina en 01.

24. En tres cajas etiquetadas con las letras A, B, C se introducen las siguientes cantidades de fichas rojas, blancas y negras, todas del mismo tamaño, peso y forma.

	Color		
Caja	Roja	Blanca	Negra
A	12	23	15
B	25	30	15
C	16	14	10

    Una afirmación correcta es

    (a) En la caja C es menos probable obtener una ficha negra.

    (b) En la caja B es donde hay más probabilidad de obtener una ficha roja.

    (c) En la caja A es donde hay más probabilidad de obtener una ficha blanca.

    (d) En las cajas A y B existe la misma probabilidad de obtener una ficha negra.

    - Opción correcta: c)
    - Solución:

      Primero se debe completar la tabla con los totales de las filas y columnas, tal como se muestra a continuación.

Caja	Color: Roja	Blanca	Negra	total
A	12	23	15	50
B	25	30	15	70
C	16	14	10	40
Total	53	67	40	160

De la tabla anterior se concluye:

- La probabilidad de obtener una ficha negra es: $\frac{3}{10}$ en la caja A, $\frac{3}{14}$ en la caja B, $\frac{1}{4}$ en la caja C. Dado que $\frac{3}{14} < \frac{1}{4} < \frac{3}{10}$ se tiene que es menos probable obtener una ficha negra en la caja B. Por lo tanto la opcion a) es incorrecta.
- La probabilidad de obtener una ficha roja en cada una de las cajas es: $\frac{6}{25}$ en la caja A, $\frac{5}{14}$ en la caja B y $\frac{2}{5}$ en la caja C. Dado que $\frac{12}{50} < \frac{5}{14} < \frac{2}{5}$ se tiene que en la caja C es más probable obtener una ficha roja. Por lo tanto la opción b) es falsa.
- La probabilidad de obtener una ficha blanca en cada una de las cajas es: $\frac{23}{50}$ en la caja A, $\frac{3}{7}$ en la caja B y $\frac{7}{20}$ en la caja C. Dado que $\frac{7}{20} < \frac{3}{7} < \frac{23}{50}$ se tiene que en la caja A hay más probabilidad de obtener una ficha blanca.
- La posibilidad de obtener una ficha negra de las cajas A y B es $\frac{3}{10}$ y $\frac{3}{14}$ respetivamente. Por lo tanto la opción d) es incorrecta.

25. Los números del 0 al 9 han sido ordenados de la manera siguiente: 0–5–4–2–9–8–6–#–#–#. Basados en el criterio que rige esa ordenación, las tres cifras faltantes deben ser colocadas, respectivamente, en cada posición de # en el orden

    (a) 3–1–7

    (b) 1–3–7

    (c) 7–1–3

    (d) 7–3–1

    - Opción correcta: *d*)
    - Solución:
      El criterio es basado en orden alfabético.
      cero – **ci**nco – **cu**atro – **d**os – **n**ueve – **o**cho – **se**is – **si**ete – **t**res – **u**no