**XXIV OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA**

*MEP – ITCR – UCR – UNA – UNED - MICIT*

# SOLUCIÓN

# PRIMERA ELIMINATORIA NACIONAL

# NIVEL C

2012

1. Un factor de la factorización completa de $2mx^2y+9y^4-m^2x^2-y^2x^2$ corresponde a

   a) $x(m-y)$
   b) $x(m+y)$
   c) $3y^2+mx-xy$
   d) $3y^2-mx-xy$

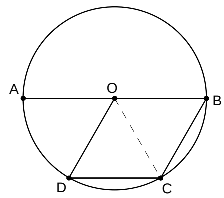
**Solución** **c)** $3y^2+mx-xy$

$$2mx^2y+9y^4-m^2x^2-y^2x^2=9y^4-\left(m^2x^2-2mx^2y+y^2x^2\right)$$
$$=\left(3y^2\right)^2-\left(mx-xy\right)^2=\left[3y^2-\left(mx-xy\right)\right]\left[3y^2+\left(mx-xy\right)\right]$$
$$=\left[3y^2-mx+xy\right]\left[3y^2+mx-xy\right]$$

2. Sean $\overline{AB}$ un diámetro de una circunferencia de centro O y C y D puntos en la circunferencia tales que $\square OBCD$ es un paralelogramo. Entonces, la medida del arco $\overset{\frown}{AD}$ es

   a) 30°
   b) 40°
   c) 60°
   d) 65°

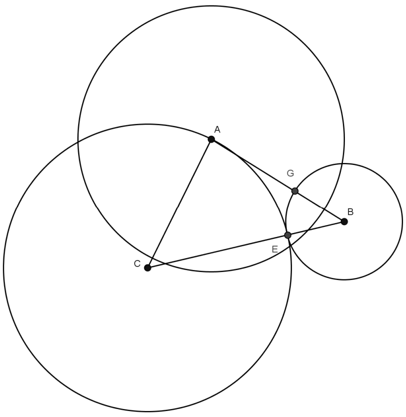
**Solución** **c) 60°**




Como $\overline{OB}$ y $\overline{OD}$ son radios, $\square OBCD$ es un rombo, por lo que $\overline{OC}$ biseca al ángulo $\angle DOB$. Además, $\overline{OC}$ es un radio, por lo que $\Delta DOC$ es equilátero. Entonces,

$m\angle ODC=m\angle BOC=m\angle AOD=60°$, con lo que $m\overset{\frown}{AD}=60°$

3. En la figura A, B y C son los centros de las circunferencias, tales que $CE = 3 \cdot EB$, $AB = 2 \cdot GB$ y el área del círculo de centro B es $16\pi \text{ cm}^2$. Si C – E – B y A – G – B entonces el perímetro del $\Delta ABC$, en centímetros, es




1.

a) 81
b) 36
c) 18
d) 9

**Solución** **b) 36**

Tenemos las siguientes igualdades:

$$CB = CE + EB = 3 \cdot EB + EB = 4 \cdot EB$$
$$AB = 2 \cdot GB = 2 \cdot EB$$
$$AC = CE = 3 \cdot EB$$

Esto nos da que el perímetro del triángulo es $9 \cdot EB$, por otro lado el área del círculo menor corresponde a $EB^2\pi = 16\pi \Rightarrow EB = 4$, por lo tanto el perímetro del triangulo corresponde a 36 cm.

4. En un plano considere los puntos colineales de coordenadas $(a,5)$, $(-1,-a)$ y $(2,a)$. El punto de coordenadas $(4-a, a-5)$ se ubica en el

a) I cuadrante

b) II cuadrante

c) III cuadrante

d) IV cuadrante

**Solución** d) IV Cuadrante

Como los primeros puntos corresponden a una misma recta entonces debe cumplirse que

$$\frac{5+a}{a+1}=\frac{2a}{3}\Rightarrow 15+3a=2a+2a^2\Rightarrow 0=2a^2-a-15$$

$$\Rightarrow 0=(2a+5)(a-3)\Rightarrow a=-\frac{5}{2}\vee a=3$$

entonces $(4-a,a-5)=\left(\frac{13}{2},-\frac{15}{2}\right)$ ó $(4-a,a-5)=(1,-2)$

En ambos casos el punto se ubica en el IV cuadrante.

5. El valor numérico de la expresión $\frac{\tan(45^\circ)+\cos(60^\circ)}{\left[\tan(30^\circ)\right]^{-1}}$ es

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\sqrt{3}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

**Solución** **b)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{\tan(45^\circ)+\cos(60^\circ)}{\left[\tan(30^\circ)\right]^{-1}}=\frac{1+\frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-1}}=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

6. Si $x$ y $y$ son números reales mayores que 1, el numerador que se obtiene al racionalizar el denominador y simplificar la expresión $\dfrac{3x}{y\sqrt{2xy}-\sqrt{3x}+\sqrt{8xy^3}}$ corresponde a

   a) $6y^3-1$

   b) $6x\sqrt{xy}$

   c) $3x\left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)$

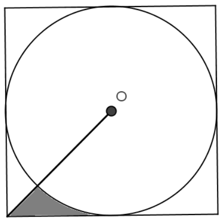
   d) $3y\sqrt{2xy}+\sqrt{3x}$

| | |
|---|---|
| **Solución** **d)** $3y\sqrt{2xy}+\sqrt{3x}$ | |

$$\frac{3x}{y\sqrt{2xy}-\sqrt{3x}+\sqrt{8xy^3}}=\frac{3x}{y\sqrt{2xy}-\sqrt{3x}+2y\sqrt{2xy}}=\frac{3x}{3y\sqrt{2xy}-\sqrt{3x}}$$

$$=\frac{3x}{3y\sqrt{2xy}-\sqrt{3x}}\,\frac{3y\sqrt{2xy}+\sqrt{3x}}{3y\sqrt{2xy}+\sqrt{3x}}=\frac{3x\left(3y\sqrt{2xy}+\sqrt{3x}\right)}{9y^2 2xy-3x}=\frac{3y\sqrt{2xy}+\sqrt{3x}}{6y^3-1}$$

7. En la figura se muestra un círculo de centro O inscrito en un cuadrado cuyo perímetro es 32 cm. ¿Cuál es el área, en centímetros cuadrados, de la región sombreada con gris?



   a) 6π

   b) 8 – 2π

   c) 32 – 2π

   d) 2π – 4

**Solución** **b)** $8-2\pi$

El área sombreada corresponde a la octava parte de la diferencia de las áreas del cuadrado y el círculo que se encuentra inscrito en éste. Como el perímetro del cuadrado es 32cm entonces cada lado mide 8cm y por lo tanto su área es $64\ \text{cm}^2$.

Como el radio del círculo mide 4cm entonces su área es $16\pi\ \text{cm}^2$.

La diferencia de las áreas es $(64 - 16\pi)\ \text{cm}^2$.

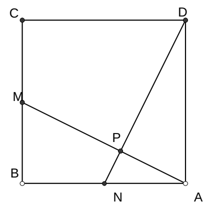
Por lo tanto el área de la región sombreada es $\left(\frac{64 - 16\pi}{8}\right)\ \text{cm}^2 = (8-2\pi)\ \text{cm}^2$.

8. Sea $\square ABCD$ un cuadrado de lado $a$, M, N los puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente y P el punto de intersección de $\overline{AM}$ y $\overline{DN}$. La medida de $\overline{PN}$ es
   a) $\frac{a\sqrt{5}}{10}$
   b) $\frac{a\sqrt{5}}{4}$
   c) $\frac{a\sqrt{5}}{5}$
   d) $\frac{a\sqrt{5}}{2}$

**Solución** a) $\frac{a\sqrt{5}}{10}$

$\Delta ADN \cong \Delta BAM$ por lo que $\angle BAM \cong \angle ADN$ y $\angle BMA \cong \angle AND$. Luego, $\Delta ADN \sim \Delta PAN$

Como $AD = 2 \cdot AN$ se tiene que $PA = 2 \cdot PN$. Llamemos $PN = x$, sabemos que $PA = 2x,\ AN = \frac{a}{2}$, y por el teorema de Pitágoras se tiene $x^2 + 4x^2 = \frac{a^2}{4}$, de donde $x = \frac{a\sqrt{5}}{10}$



9. Carmen tiene cuatro cadenas con distinto número de eslabones cada una de ellas e identificadas con las letras A, B, C y D. Todas las cadenas tienen entre 273 y 290 eslabones. A tiene 12 eslabones menos que B y C tiene 2 menos que D y 5 menos que B. El número de eslabones de la cadena D es divisible por 11. ¿Cuántos eslabones tiene la cadena A?

   a) 266
   b) 277
   c) 279
   d) 282

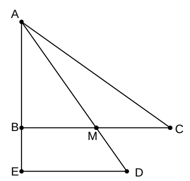
**Solución** **b) 277**

Sólo hay dos números divisibles por 11 entre 273 y 290 incluyendo a éstos, que son 275 y 286, por lo que se procederá a construir una tabla para determinar el número de eslabones de la cadena A.

| Número de eslabones de A | Número de eslabones de B | Número de eslabones de C | Número de eslabones de D |
|---|---|---|---|
| 266 | 278 | 273 | 275 |
| 277 | 289 | 284 | 286 |

Entonces el número de eslabones de la cadena D es 286 y por ende los eslabones de la cadena A son 277. Por lo que la opción correcta es B.

10. En la figura adjunta $\Delta ABC$ y $\Delta DEA$ son triángulos rectángulos congruentes entre sí y M es el punto medio de $\overline{BC}$.




Si $BC = 4$, entonces la medida de $\overline{AC}$ es

   a) $2\sqrt{6}$
   b) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$
   c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
   d) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

| **Solución** | **a)** $2\sqrt{6}$ |
|---|---|

$\Delta ABC \cong \Delta DEA$, de donde $BC = EA = 4$. Además, $\Delta DEA \sim \Delta MBA$, por lo que $\dfrac{DE}{MB} = \dfrac{AE}{AB}$.

Sea $AB = DE = x$, como $MB = 2$, se tiene que $\dfrac{x}{2} = \dfrac{4}{x}$, de donde $x = 2\sqrt{2}$.

Por el teorema de Pitágoras en $\Delta ABC$, $AC = 2\sqrt{6}$.

11. Considere la expresión $x^{2012} + x^{2011} + \cdots + x^2 + x + 1$, ¿cuantos números enteros $x$ hacen que dicha expresión sea igual a $x^{2012}$?
    a) Tres
    b) Dos
    c) Uno
    d) Ninguno

**Solución** **c) uno**

$$x^{2012} + x^{2011} + \cdots + x^2 + x + 1 = x^{2012} \Leftrightarrow x^{2011} + \cdots + x^2 + x + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x\left(x^{2010} + \cdots + x + 1\right) = -1$$

Como se dice que *x* es entero entonces debe ser un divisor de -1, pero se puede observar que no puede ser 1, por lo tanto el único valor entero posible para *x* es -1.

Por otra parte, como la expresión $x + x^2 + ... + x^{2010}$ contiene 2010 términos, 1005 con exponente par y 1005 con exponente impar, cuando $x = -1$ esta expresión es cero. Por lo tanto, si $x = -1$ se tiene que $x(x^{2010} + ... + x + 1) = -1 \cdot (0 + 1) = -1$.

12. La medida, en centímetros, de la menor de las alturas de un triángulo cuyos lados miden 6cm, 7cm y 11cm corresponde a
    a) $\dfrac{12\sqrt{10}}{11}$
    b) $\dfrac{12\sqrt{10}}{7}$
    c) $2\sqrt{10}$
    d) $6\sqrt{10}$

**Solución** **a)** $\frac{12\sqrt{10}}{11}$

La menor altura del triángulo se encontrará sobre el lado mayor del triángulo y calculando el área de dicho triángulo con la fórmula de Herón tenemos, $A=\sqrt{12\cdot 6\cdot 5\cdot 1}=6\sqrt{10}\ \text{cm}^2$.

Y como otra fórmula para el cálculo del área de un triángulo es $A=\frac{bh}{2}$ entonces, sustituyendo se tiene que $\frac{11h}{2}=6\sqrt{10}\Rightarrow h=\frac{12\sqrt{10}}{11}$ cm.

13. Considere tres números enteros $a,b$, $p$ tales que $p$ es primo, $a$ excede a $p$ en 2 unidades y $b$ excede a $a$ en 2 unidades. Entonces con certeza se cumple que el recíproco de $\frac{b}{a^2-4}$ es un número

a) primo
b) múltiplo de 2
c) racional no entero
d) entero no divisible por p

**Solución** **a) primo**

Observe que $a=p+2$ y $b=a+2=p+4$, luego el reciproco de $\frac{b}{a^2-4}$ es $\frac{a^2-4}{b}=\frac{(p+2)^2-4}{p+4}=\frac{p^2+4p}{p+4}=p$.

14. En el siguiente sistema de ecuaciones donde $a\neq 0$, $b\neq 0$ y $b\neq a$,

$$\begin{cases}\frac{x-y}{a}+1=\frac{x-y}{b}\\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1\end{cases}$$ el valor de $y$ es

a) $\dfrac{ab(2b-a)}{(a-b)^2}$

b) $\dfrac{ab(2b+a)}{(a-b)^2}$

c) $\dfrac{a(a-2b)}{(a-b)^2}$

d) $\dfrac{b(2b-a)}{(a-b)^2}$

**Solución** a) $\dfrac{ab(2b-a)}{(a-b)^2}$

De la segunda ecuación: $\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=1 \Rightarrow bx-ay=ab \Rightarrow x=a+\dfrac{a}{b}y$

De la primera ecuación:

$$\frac{x-y}{a}+1=\frac{x-y}{b} \Rightarrow b(x-y)+ab=a(x-y) \Rightarrow (x-y)(b-a)=-ab$$

Sustituyendo $x$ por $a+\dfrac{a}{b}y$ se tiene:

$$\left(a+\frac{a}{b}y-y\right)(b-a)=-ab \Rightarrow a+y\left(\frac{a}{b}-1\right)=\frac{-ab}{b-a}$$

$$\Rightarrow y\left(\frac{a}{b}-1\right)=\frac{ab}{a-b}-a$$

$$\Rightarrow y\left(\frac{a-b}{b}\right)=\frac{ab-a^2+ab}{a-b}$$

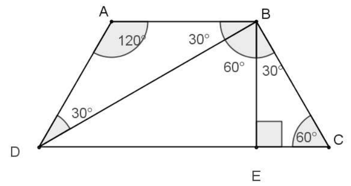
$$\Rightarrow y=\frac{2ab-a^2}{a-b}\cdot\frac{b}{a-b}$$

$$\Rightarrow y=\frac{ab(2b-a)}{(a-b)^2}$$

15. El cuadrilátero $\square ABCD$ es tal que $AD = AB = BC = 1$, $DC = 2$ y $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{DC}$. Entonces la medida del ángulo $\angle DBC$ corresponde a

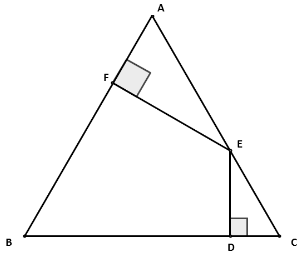
a) 45°
b) 60°
c) 90°
d) 120°

Solución: c) 90°




Si se trazan las alturas del trapecio isósceles desde *A* y *B* se forma un rectángulo y dos triángulos rectángulos semi-equiláteros pues un cateto mide $\frac{1}{2}$ y la hipotenusa 1. Así, $\mathrm{m}\angle BCD = \mathrm{m}\angle ADC = 60^\circ$ y por consiguiente los ángulos $\angle DAB$ $y$ $\angle ABC$ miden 120° cada uno. Ahora, como $\Delta ADB$ es isósceles, el ángulo $\angle ABD$ mide 30° y por lo tanto, el ángulo $\angle DBC$ mide $120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$.

16. Según los datos de la figura adjunta, en donde $\Delta ABC$ es equilátero de lado *l* y EC = $x$, el resultado de DE + EF corresponde a




a) $\frac{l\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{4l}{5}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}(l-x)$

d) $\frac{l-x}{2}$

**Solución** **a)** $\frac{l\sqrt{3}}{2}$

Como los triángulos $\Delta AEF$ y $\Delta CED$ son semiequiláteros (30°, 60°, 90°), se cumple que:

Considerando el $\Delta CED$: $\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{ED}{EC} = \frac{ED}{x} \Rightarrow ED = x \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

Considerando el $\Delta AEF$: $\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{EF}{EA} = \frac{EF}{l-x} \Rightarrow EF = (l-x)\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{(l-x)\sqrt{3}}{2}$.

Entonces, $ED + EF = \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{(l-x)\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$.

17. Considere las funciones $f:\mathbb{N} \to \{1,-1\}$ y $g:\mathbb{N} \to \{1,-1\}$ tales que $f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$ y $g(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ no es primo} \\ -1 & \text{si } n \text{ es primo} \end{cases}$

Si $q$ es un número natural cuyos divisores primos son todos impares, entonces $f\left(q^{2012}-1\right) + g\left(q^{2012}-1\right)$ corresponde a

a) -2
b) -1
c) 0
d) 2

**Solución** d) 2

Observe que si $q$ es un número natural cuyos divisores primos son todos impares entonces $q^{2012}$ sigue siendo producto de impares, por lo tanto impar, luego $q^{2012}-1$ es par, entonces $f\left(q^{2012}-1\right) = 1$.

Por otro lado tenemos que $q^{2012}-1 = \left(q^{1006}-1\right)\left(q^{1006}+1\right)$ por lo tanto es compuesto, entonces $g\left(q^{2012}-1\right) = 1$. Entonces $f\left(q^{2012}-1\right) + g\left(q^{2012}-1\right) = 1+1 = 2$.

18. Sea $x$ un número real tal que $49^x + 49^{-x} = 7$. Entonces el valor de $7^x + 7^{-x}$ es

a) 9
b) 3
c) $\sqrt{7}$
d) $\sqrt{5}$

| **Solución** | **b) 3** |
|---|---|

Sea $y = 7^x + 7^{-x}$

$\Rightarrow y^2 = 49^x + 49^{-x} + 2 \cdot 7^x \cdot 7^{-x} = 7 + 2 = 9$
$\Rightarrow y = 3$

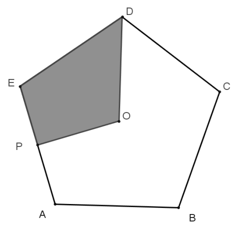
19. Considere las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ con $f(n) = \begin{cases} n+1 & \text{si } k(n) \text{ es par} \\ n-1 & \text{si } k(n) \text{ es impar} \end{cases}$ y $k(n) = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$ . El valor de $f(2012)$ corresponde a

a) 2011
b) 2012
c) 2013
d) 2014

| **Solución** | c) 2013 |
|---|---|

Para determinar $f(2012)$ se debe determinar primero el valor de $k(2012) = 1 + 2 + ... + 2012 = (1 + 3 + ... + 2011) + (2 + 4 + ... + 2012)$ que es la suma de 1006 números pares y 1006 números impares, por lo tanto es par, por lo que $f(2012) = 2012 + 1 = 2013$.

20. En la figura ABCDE es un pentágono regular de centro O y P es el punto medio de $\overline{AE}$. ¿Qué porcentaje del área del pentágono es el área del cuadrilátero que está sombrado?




a) 20%
b) 25%
c) 30%
d) 40%

| **Solución** | **c) 30%** |
|---|---|

Si se trazan los segmentos desde el centro del polígono a los vértices, se forman cinco triángulos congruentes, y la región sombreada corresponde a un triángulo y medio. Así, el porcentaje del pentágono sombreado es $\dfrac{1+\frac{1}{2}}{5}\cdot 100\% = \dfrac{3}{10}\cdot 100\% = 30\%$.

21. La cantidad de soluciones reales de la ecuación $\dfrac{\log\left(4-x^2\right)}{\log\left(2-x\right)}=1$ es

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3

| **Solución** | **b) 1** |
|---|---|

Para que la expresión del término izquierdo esté bien definida en $\mathbb{R}$ se requiere que $x<2$.

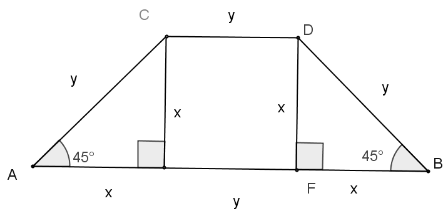
$$\frac{\log\left(4-x^2\right)}{\log\left(2-x\right)}=1$$
$$\Rightarrow \log\left(4-x^2\right)=\log\left(2-x\right)$$
$$\Rightarrow 4-x^2=2-x$$
$$\Rightarrow x^2-x-2=0$$
$$\Rightarrow (x-2)(x+1)=0$$
$$\Rightarrow x=2 \quad ó \quad x=-1$$

Por lo tanto la única solución de la ecuación es $x=-1$.

22. Un trapecio isósceles tiene tres lados congruentes y un ángulo de 45°. Si el perímetro es 14 cm entonces su área, en cm², es

a) $2\sqrt{2}-1$
b) $9-4\sqrt{2}$
c) $1+5\sqrt{2}$
d) $2+10\sqrt{2}$

**Solución** **c)** $1+5\sqrt{2}$




De acuerdo con los datos de la figura $y=x\sqrt{2}$ y entonces el perímetro del cuadrilátero está dado por $P=2x+4x\sqrt{2}=x\left(2+4\sqrt{2}\right)$ de donde se tiene que $14=x\left(2+4\sqrt{2}\right)$

$$\Rightarrow x=\frac{14}{2\left(1+2\sqrt{2}\right)}=\frac{7}{1+2\sqrt{2}}\,\frac{1-2\sqrt{2}}{1-2\sqrt{2}}=\frac{7\left(1-2\sqrt{2}\right)}{-7}=2\sqrt{2}-1$$

El área está dada por
$$A=\frac{2y+2x}{2}x=x^2+xy=x^2+x^2\sqrt{2}=x^2\left(1+\sqrt{2}\right)$$
$$\Rightarrow A=\left(2\sqrt{2}-1\right)^2\left(1+\sqrt{2}\right)=\left(9-4\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)=1+5\sqrt{2}$$

23. La cantidad de números naturales de tres o cuatro cifras que tienen exactamente tres divisores positivos es la siguiente

a) 17

b) 19

c) 21

d) 23

**Solución** **C) 21**

Un número que tiene exactamente tres divisores debe ser el cuadrado de un número primo, y si tiene tres o cuatro cifras debe ser el cuadrado de un número primo mayor que 10 y menor que 100.

El problema entonces se reduce a contar los números primos desde el 11 hasta el 97: son 21 en total: 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 y 97

24. Sea D el pie de la altura sobre la hipotenusa del ∆ABC rectángulo en A. Si $BD = \frac{3}{2}$ y la razón entre el área del ∆ABD y el área del ∆ADC es $\frac{4}{9}$ entonces BC es igual a

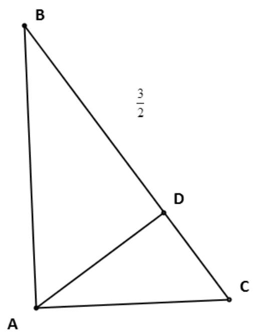
a) $\frac{9}{2}$

b) $\frac{9}{4}$

c) $\frac{27}{8}$

d) $\frac{39}{8}$

**Solución** **d)** $\frac{39}{8}$



Por AA, $\Delta ABD \sim \Delta CAD$ y como la razón entre sus áreas es $\frac{4}{9}$ entonces la razón entre sus lados correspondientes es $\frac{2}{3}$. Por lo tanto $\frac{\frac{3}{2}}{AD} = \frac{2}{3} \Rightarrow AD = \frac{9}{4}$.

Por el teorema de la altura sobre la hipotenusa se tiene que $\frac{3}{2}CD = \left(\frac{9}{4}\right)^2 \Rightarrow CD = \frac{27}{8}$.

Entonces $CB = \frac{27}{8} + \frac{3}{2} = \frac{39}{8}$.

25. Una solución de la ecuación $a(x-1) = \frac{2bx}{x+1}$, con $a, b \in \mathbb{R}$ constantes diferentes de cero, es

a) $\frac{b - \sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

b) $\frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}$

c) $\frac{b - \sqrt{a^2 + b^2}}{b}$

d) $\frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a}$

**Solución** **d)** $\frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a}$

$$a(x-1) = \frac{2bx}{x+1} \Rightarrow a(x-1)(x+1) = 2bx \Rightarrow ax^2 - 2bx - a = 0$$

$$\Delta = (-2b)^2 - 4 \cdot a \cdot -a = 4b^2 + 4a^2 = 4\left(b^2 + a^2\right)$$

Luego $x = \frac{2b \pm \sqrt{4\left(b^2 + a^2\right)}}{2a} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + a^2}}{a}$