# XXVIII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

*UNA - UCR - TEC - UNED - MEP - MICITT*

# BANCO DE PROBLEMAS
# DÍA 2

## I Nivel

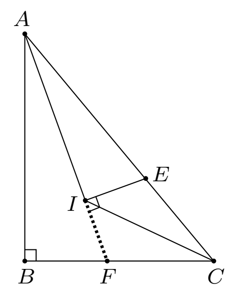
## 7°

*Martes 15 de noviembre del 2016*

# Geometría

1. Sean el $\triangle ABC$ recto en $B$, $F$ un punto tal que $B-F-C$, $\overline{AF}$ el segmento que biseca al $\angle BAC$, $I$ un punto tal que $A-I-F$, $\overline{CI}$ el segmento que biseca al $\angle ACB$, $E$ un punto tal que $A-E-C$ y $\overline{AF} \perp \overline{EI}$. Determine $m\angle EIC$.

   • Solución:
   Considere la figura

   Sea $x = m\angle BAF$ e $y = m\angle BCI$ y así $m\angle BAC = 2x$ y $m\angle BCA = 2y$

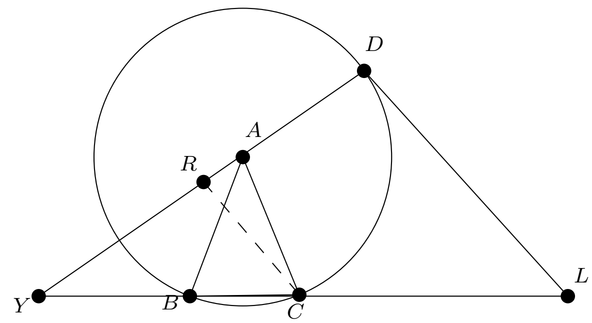
   Se tiene que $m\angle BAC + m\angle BCA = 90°$ y entonces $x + y = 45°$.

   Ahora $\angle IFC$ es externo al $\triangle BAF$ y entonces $m\angle IFC = 90° + x$

   Por suma de ángulos internos del $\triangle IFC$ se tiene que $m\angle FIC + 90° + x + y = 180°$ de donde $m\angle FIC = 45°$, y entonces $m\angle EIC = 90° - m\angle FIC = 45°$.

2. Sean el $\triangle ABC$ isósceles con $AB = AC$ y $m\angle BAC < 60°$, $T$ la circunferencia de centro $A$ y radio $\overline{AB}$, $D$ la intersección de $T$ con la paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ que pasa por $C$, $(D \neq C)$, $Y$ la intersección de $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$, $L$ un punto tal que $B - C - L$ y $CD = CL$, y $R$ el punto medio de $\overline{YD}$. Si $\overleftrightarrow{DL} \parallel \overleftrightarrow{RC}$, determine $m\angle BAC$.

   • Solución:




Sea $\alpha = m\angle ABC$.

Al ser el $\triangle ABC$ isósceles en $A$, $m\angle ACB = \alpha$ y $m\angle BAC = 180° - 2\alpha$.

Como $AB = AC$, $T$ también pasa por $C$.

Al ser $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ y $AC = AD$ pues son radios, entonces $\angle ADC = \angle ACD = 180° - 2\alpha$.

Por Teorema de suma de ángulos internos en el triángulo $\triangle YCD$, $m\angle DYC + m\angle DCY + m\angle CDY = 180°$.

Note que $m\angle DCY = m\angle BCA + m\angle ACD = \alpha + 180° - 2\alpha = 180° - \alpha$.

Entonces $m\angle DYC + (180° - \alpha) + (180° - 2\alpha) = 180° \Rightarrow m\angle DYC = 3\alpha - 180°$.

Por último, como $\overleftrightarrow{DL} \parallel \overleftrightarrow{RC}$ y $R$ es el punto medio de $\overline{YD}$, $\overline{RC}$ es paralela media en $\triangle YDL$, y así, $YC = CL$.

Por enunciado $YC = CL = CD \Rightarrow \triangle YDC$ es isósceles $\Rightarrow m\angle YDC = m\angle DYC \Rightarrow 180° - 2\alpha = 3\alpha - 180° \Rightarrow 360° = 5\alpha \Rightarrow \alpha = 72° \Rightarrow 180° - 2\alpha = 36° \Rightarrow m\angle BAC = 36°$.

3. Sean $P$ y $Q$ puntos sobre $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, respectivamente. Si $\square ABCD$ es un cuadrado y, además, $m\angle BPA = m\angle APQ$, determine la $m\angle PAQ$.

- Solución:

Sea $\theta = m\angle BPA$, $l =$ lado del cuadrado y $\overline{AH}$ la altura del $\triangle APQ$.

$\triangle ABP \cong \triangle AHP$ por el criterio $(a, a, l)$. Además, dado que $AH = AD$ , $AQ = AQ$ y $m\angle ADQ = m\angle AHQ$ se tiene que $\triangle ADQ \cong \triangle AHQ$, debido a esto $m\angle AQH = m\angle AQD = \varphi$.

$m\angle PAQ = 180° - \theta - \varphi$.

$m\angle QPC = 180° - 2\theta$, $m\angle PCQ = 90°$ y $m\angle PQC = 180° - 2\varphi$.

Luego, $450° - 2\theta - 2\varphi = 180 \Rightarrow \varphi + \theta = 135° \Rightarrow m\angle PAQ = 45°$

# Teoría de Números

1. Determine la suma de los dígitos del menor entero positivo $d$, tal que la suma $5d+4d+3d+2d+d$ sea un número mayor que 1000 y dicha suma posee todas sus cifras iguales.

   • Solución:

   Sea $s = 5d + 4d + 3d + 2d + d$; se tiene que $s = 15d = 3 \cdot 5 \cdot d$. Si $s = rrr \dots r$, siendo $r$ un dígito, se tiene que $s = rrr \dots r$ es divisible por 5 y por 3.

   Para que $s = rrr \dots r$ sea divisible por 5, $r$ tiene que ser igual a 0 o igual a 5; pero no puede ser igual a cero pues $d$ no sería entero positivo; así que $r = 5$.

   Para que $s = rrr \dots r$ sea divisible por tres, la suma de sus dígitos debe ser múltiplo de 3; $s = 555$ es una cifra que satisface esta condición de ser divisible por 3 (pues la suma de sus dígitos es 15 -múltiplo de 3), pero no es mayor que 1000.

   La siguiente cifra que satisface ser múltiplo de tres es $r = 555\,555$ (la suma de sus dígitos es 30 -múltiplo de 3) y es mayor que 1000.

   Así, $15d = 555\,555 \Rightarrow d = 37\,037$.

   Por lo tanto, la suma de los dígitos del número buscado es 20.

2. Determinar todos los valores de los números primos $p$ y $q$ mayores que 8, con $p > q$ tales que $\dfrac{2016}{p+q}$ es un cuadrado perfecto mayor o igual que 25.

• Solución:

como $p > 8$ y $q > 8$, entonces $p + q > 16$ y $\frac{2016}{p+q} < 126$.

Dado que $2016 = 2^5 3^2 7$ entonces los posibles valores de $\frac{2016}{p+q}$ son $2^4 3^2 = 144$, $2^2 3^2 = 36$, $2^4 = 16$, $3^2 = 9$.

Puesto que $\frac{2016}{p+q} \geq 25$ se tiene que $\frac{2016}{p+q} = 36 \leftrightarrow p + q = 56$.

De la ecuación anterior son soluciones $(p, q) = (37, 19), (43, 13)$.

3. Determine la cantidad de números impares $n$ menores que 1000 que cumplen que $\mathrm{mcd}(n, 2016)$ es un número de dos dígitos.

**Solución:**

Los posibles valores de $(n, 2016)$ son:
$1, 3, 7, 9, 21, 63$
$2, 6, 14, 18, 42, 126$
$4, 12, 28, 36, 84, 252$
$8, 24, 56, 72, 168, 504$
$16, 48, 102, 144, 336, 1008$
$32, 96, 224, 288, 672, 2016$

Dado que $n$ es impar, se tiene que $n \in \{1, 3, 7, 21, 9, 63\}$ y los únicos de dos dígitos son 21 y 63.

$(n, 2016) = 21$ si $n = 21k$ y $2, 3$ no dividen a $k$.
Así, $n = 21k$ con $k \in \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 25, 29, 31, 35, 37, 41, 43, 47\}$.

Por otra parte, $(n, 2016) = 63$ si $n = 63k$ y 2 no divide a $k$.
Así $n = 63k$ con $k \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31\}$

Por lo tanto hay 32 números posibles.

# Razonamiento Lógico

1. En una galaxia muy lejana hay 6 Jedis (guardianes de la paz de la galaxia) sentados alrededor de una mesa, en forma de hexágono regular. Sobre la mesa cada uno tiene un sable de luz con su respectivo nombre escrito en él. En un momento, un malvado Sith desordena los sables de luz, de manera tal que cada Jedi todavía tiene un sable de luz al frente, pero nadie tiene el que le pertenece. Esto es un problema pues para derrotar al Sith, al menos dos Jedis deben estar con el sable de luz que les pertenece. Por suerte uno de ellos rápidamente diseña un plan y descubre que si se gira la mesa hasta cierto punto, dos de los sables estarán al frente de sus respectivos dueños. Justifique que este Jedi tiene razón.

   • Solución:
   Inicialmente nadie tiene el sable que le corresponde, llámese “turno” a rotar la mesa una posición a favor de las manecillas del reloj; es decir, a cada Jedi se le asigna el sable del compañero de la derecha en cada turno.

   Después de 6 turnos se vuelven al estado original.

   Entonces se tiene 5 distintos turnos de cada uno de los aplaudió exactamente una vez, ya que inicialmente nadie estaba con su sable correspondiente pero son 6 Jedis.

   Por el Principio de las casillas, habrán al menos dos que aplaudan simultáneamente en al menos un turno. Y así, estos dos podrán vencer al malvado Sith.

2. Sea $P$ un polígono regular con 2016 lados. Los vértices del polígono se enumeran consecutivamente $V_1, V_2, \ldots, V_{2016}$. Se escogen cuatro vértices cualesquiera $V_i, V_j, V_k, V_l$, de modo que $1 \leq i < j < k < l \leq 2016$. Se trazan los segmentos $\overline{V_iV_k}$ y $\overline{V_jV_l}$, de modo que se divide el interior de $P$ en cuatro regiones separadas. Para cada par de vértices no consecutivos en una región, se traza el segmento que los une, es decir, los que no son lados de $P$, de modo que no intersecan los dos segmentos iniciales. Determine cómo se pueden escoger los vértices $V_i, V_j, V_k, V_l$ de modo que la cantidad total de segmentos trazados sea máxima.

• Solución:

Primero observe que si una componente tiene $r$ vértices, entonces tiene $\dfrac{r(r-1)}{2} - r$ aristas trazadas.

La manera de obtener la máxima cantidad de segmentos es cuando los cuatro vértices escogidos son consecutivos, por ejemplo $i = 1, j = 2, k = 3, l = 4$, en este caso la cantidad total es $\dfrac{2012 \cdot 2011}{2} - 2011 = 2021055$. Para ver porque esta es la mejor escogencia, supongamos que tenemos una escogencia cualquiera de los vértices. Sean $A, B, C, D$ los conjuntos de vértices para las cuatro componentes de modo consecutivo. Suponga que la cantidad de vértices en cada una es respectivamente $a, b, c, d$, es decir $a+b+c+d+4 = 2016$. Sin pérdida de generalidad, suponga que $a > b$. Entonces para la componente $A$ se tiene $\dfrac{a(a-1)}{2} - a$ aristas y para la $B$ se tiene $\dfrac{b(b-1)}{2} - b$ aristas. Si movemos el vértice que las separa, de modo que se corre un lugar hacia adelante, entonces se agrega un vértice más a $A$, y se elimina un vértice de $B$, entonces se agrega $a$ aristas a $A$ y se disminuye $b$ aristas a $B$, esto significa que la suma total de aristas aumenta. Como esta propiedad no depende de la componente, aplicando la misma idea para las otras dos componentes, siempre que se agregue un vértice a una componente que tiene más vértices, el total de aristas aumentará, lo que comprueba que esta es la mayor cantidad posible.

**Observación:** Si suponemos que dos componentes tienen la misma cantidad de vértices, al cambiar un vértice de una componente a la otra el total de aristas se mantiene, pues se agrega y elimina la misma cantidad de aristas, sin embargo, al repetir el proceso si aplica lo anterior.

3. Determine la cantidad de números de 10 cifras distintas que son divisibles por 72.

   • Solución:

   Para que un número sea divisible por 72, debe serlo por 9 y por 8. Todo número de 10 cifras distintas es divisible por 9, pues $0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ es múltiplo de 9. Por lo tanto se debe encontrar la cantidad de números que sean divisibles por 8. Para que un número sea divisible por 8, el número formado por sus tres últimos dígitos debe ser múltiplo de 8.

   Ordenemos los primeros múltiplos de 8:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 | 80 | 88 | 96 |
| 104 | 112 | 120 | 128 | 136 | 144 | 152 | 160 | 168 | 176 | 184 | 192 | |
| 200 | 208 | 216 | 224 | ... | | | | | | | | |
| 304 | 312 | 320 | 328 | ... | | | | | | | | |

   Se observa que los que inician con un número impar tienen el mismo comportamiento, así como los que inician con un número par. Entonces se puede completar fácilmente el siguiente arreglo

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 | 80 | 88 | 96 |
| 104 | 112 | 120 | 128 | 136 | 144 | 152 | 160 | 168 | 176 | 184 | 192 | |
| 200 | 208 | 216 | 224 | 232 | 240 | 248 | 256 | 264 | 272 | 280 | 288 | 296 |
| 304 | 312 | 320 | 328 | 336 | 344 | 352 | 360 | 368 | 376 | 384 | 392 | |
| 400 | 408 | 416 | 424 | 432 | 440 | 448 | 456 | 464 | 472 | 480 | 488 | 496 |
| 504 | 512 | 520 | 528 | 536 | 544 | 552 | 560 | 568 | 576 | 584 | 592 | |
| 600 | 608 | 616 | 624 | 632 | 640 | 648 | 656 | 664 | 672 | 680 | 688 | 696 |
| 704 | 712 | 720 | 728 | 736 | 744 | 752 | 760 | 768 | 776 | 784 | 792 | |
| 800 | 808 | 816 | 824 | 832 | 840 | 848 | 856 | 864 | 872 | 880 | 888 | 896 |
| 904 | 912 | 920 | 928 | 936 | 944 | 952 | 960 | 968 | 976 | 984 | 992 | |

   Como los números deben tener todos los dígitos distintos, se tachan todos los que repitan algún dígito. Los restantes los dividimos en dos grupos: Los que contienen 0, que son 24, y los que no contienen 0 que son 56.

   I Caso:
   Si los últimos tres dígitos ya contienen al 0, entonces para la escogencia de los restantes 7 dígitos se tienen 7! posibilidades, pues para el primer dígito hay 7 opciones a escoger, para el segundo dígito quedan 6, para el tercero 5, etc.

   II Caso:
   Si los últimos tres dígitos no contienen al 0, entonces para la escogencia de los restantes 7 dígitos se tienen $6! \times 6$ posibilidades, pues para el primer dígito hay 6 opciones a escoger (este no puede ser 0), para el segundo dígito quedan 6, para el tercero 5, etc.

   El total de números es $7! \times 24 + 6! \times 6 \times 56$

4. En un juego para dos personas se tiene una cuadrícula de tres por tres y fichas amarillas y blancas. El primer jugador selecciona alguna de las fichas y la coloca en una de las casillas; seguidamente, el segundo jugador selecciona alguna de las fichas (de cualquier color) y la coloca en una de las casillas disponibles, y así sucesivamente. Gana el primero que forme una línea de tres fichas del mismo color en cualquier orientación (horizontal, vertical o diagonal). Determine si existe una estrategia ganadora para alguno de los dos jugadores.

• Solución:

Existe una estrategia ganadora para el primer jugador. Para esto debe colocar su primer ficha, sin pérdida de generalidad supongamos que es amarilla (A), en la casilla central.

Para no perder en la siguiente jugada, el segundo jugador debe colocar una ficha blanca (B). Tiene dos opciones para colocarla, en una esquina o en una casilla lateral.

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | A | |
| | | |

I Caso: Si la coloca en una esquina
Basta con que el primer jugador coloque una ficha B en la esquina opuesta. De esta forma, sin importar el color de la ficha que escoja el segundo jugador, lo llevará a una posición perdedora.

| | | |
|---|---|---|
| | | B |
| | A | |
| B | | |

Si el segundo jugador coloca una ficha A, el primer jugador coloca otra A y forma una línea de tres A.

Si el segundo jugador coloca una ficha B, el primer jugador coloca otra B y forma una línea de tres B.

II Caso: Si la coloca en una casilla lateral.
El primer jugador debe colocar una ficha B en la casilla lateral opuesta.

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| B | A | B |
| | | |

En la siguiente jugada del segundo jugador, solamente podría colocar una B en otra casilla lateral, y basta con que el primer jugador coloque una ficha B en la casilla lateral opuesta.

| | | |
|---|---|---|
| | B | |
| B | A | B |
| | B | |

De esta forma, sin importar el color de la ficha que escoja el segundo jugador, lo llevará a una posición perdedora en la siguiente jugada.