



# XXIX Olimpiada Costarricense de Matemática

## Nivel II – Día 1

*Lunes 13 de noviembre de 2017*

#1 Carlos juega con Luis el juego llamado *AMOCLO*. En este juego se cuenta con varios puños de bolitas, el tamaño de los puños se puede modificar siguiendo las reglas:

- Es permitido juntar dos puños de bolitas en uno solo.
- Si un puño tiene un número par de bolitas, es permitido dividir en dos puños con el mismo número de bolitas cada uno.

En determinado momento el juego *AMOCLO* cuenta con tres puños, uno de 5 bolitas, otro de 49 bolitas y el último de 51 bolitas.

Carlos le pide a Luis que jueguen hasta lograr 105 puños de bolitas y el que lo logre será el ganador. Sin embargo, Luis le indica que el juego, bajo esas condiciones, no tendría ganador.

Pruebe que la afirmación de Luis es verdadera.

#2 Encuentre todos los enteros positivos  $n$  tales que  $3^n + 5^n$  es múltiplo de  $3^{n-1} + 5^{n-1}$ .

#3 Considere el rombo  $ABCD$  con  $\angle BAD = 60^\circ$ . Sean  $G$  y  $Z$  dos puntos distintos en el segmento  $AC$  y considere puntos  $E$  y  $X$  en  $\overline{AD}$ ,  $F$  y  $Y$  en  $\overline{DC}$ , tales que  $\square GEDF$  y  $\square ZXDY$  son paralelogramos. Demuestre que  $\triangle BEX \cong \triangle BFY$ .

Tiempo: tres horas

Cada problema vale siete puntos