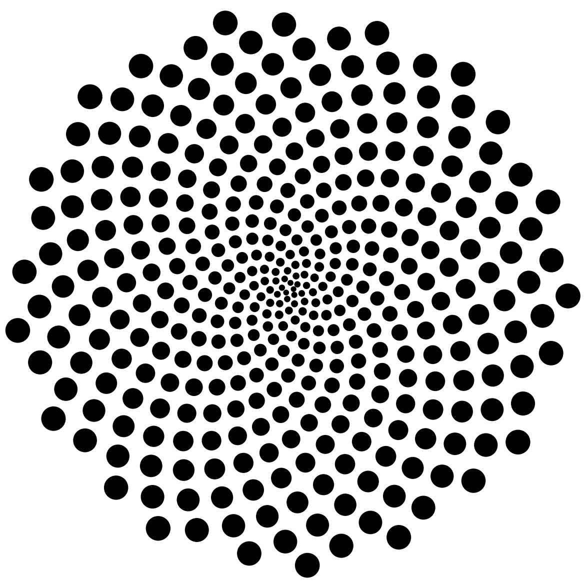
XXIX OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

MEP - UNA - UCR - MICITT - UNED - TEC

SOLUCIÓN
SEGUNDA ELIMINATORIA NACIONAL



III Nivel

$(10^{\circ} - 11^{\circ} - 12^{\circ})$

2017

Estimado estudiante:

La Comisión Organizadora de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas le saluda y felicita por haber clasificado a la segunda eliminatoria nacional de estas justas académicas. La prueba consta de dos partes: una primera parte de 12 preguntas de selección única, ponderadas con dos puntos cada respuesta correcta, y una segunda parte con tres preguntas de desarrollo, con un valor de siete puntos cada solución correcta.

Los resultados de esta eliminatoria se publicarán a partir del lunes 02 de octubre, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en las hojas de respuestas que se le han entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en las hojas de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 pts c/u**

1. Considere el cuadrado $\square ABCD$, con $AB = 8$ cm. Una circunferencia tangente a $\overline{BC}$ contiene a los vértices A y D. La longitud, en centímetros, del radio de la circunferencia es

   (a) 4

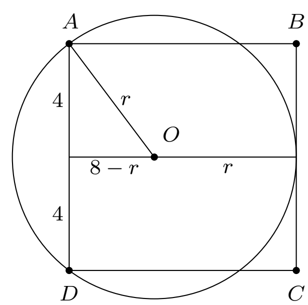
   (b) 5

   (c) 6

   (d) $4\sqrt{2}$

- Opción correcta: b
- Solución:

  Considere la figura



Se tiene que O es el centro de la circunferencia y entonces por Pitágoras se tiene:

$$r^2 = 4^2 + (8-r)^2 \Rightarrow 16r = 80 \Rightarrow r = 5$$

2. En cada casilla de una cuadrícula de 2×2 se desea escribir los números 1, -1 o 0 de manera que ninguna fila o columna sume cero. La cantidad máxima de maneras en que es posible escribir estos números es

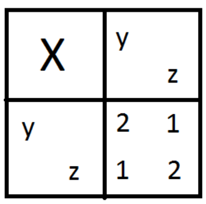
   (a) 9

   (b) 12

   (c) 18

   (d) 36

- Opción correcta: c
- Solución:



Si el número en la primer casilla es x entonces la casilla de la derecha y la de abajo tienen dos posibilidades para no sumar 0, digamos y y z.

Si estas dos fueran la misma entonces la cuarta casilla tiene dos opciones para no sumar cero, pero si son diferentes solo le queda una opción.

Así por cada x hay 6 opciones y como x tiene 3 posibilidades en total hay 18 posibilidades.

3. Sea el $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo, tal que $m\angle ACB = 90°$, $AC = 3$ y $CB = 4$. Sea O un punto tal que $A - O - B$. Si una circunferencia de centro O es tangente a $\overline{AC}$ en Q y a $\overline{BC}$ en P, entonces OP es

   (a) $\dfrac{12}{7}$

   (b) $\dfrac{7}{12}$

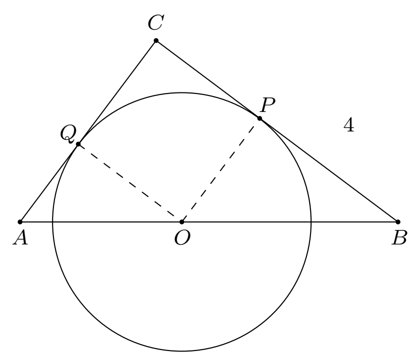
   (c) $\dfrac{9}{7}$

   (d) 6

- Opción correcta: a

- Solución:

  Considere la figura



Se tiene que $\overline{OQ} \perp \overline{AC}$ y $\overline{OP} \perp \overline{CB}$

Sean $OP = OQ = r$, por ser radios.

$$(ABC) = (AOC) + (BOC) \Rightarrow \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{AC \cdot OQ}{2} + \frac{BC \cdot OP}{2} \Rightarrow 6 = \frac{7r}{2} \Rightarrow \frac{12}{7} = r$$

$\therefore OP = \dfrac{12}{7}$

4. Sean a, b y c números reales, con $a \neq c$. Sean

$$P(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 2$$

$$Q(x) = 3x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 2$$

Las condiciones que deben cumplir los números a, b y c para que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ tengan dos raíces comunes son

(a) $a = 3$ y $b = c$

(b) $b = -5$ y $a = -c$

(c) $c = -3$ y $a = b$

(d) $b = 5$ y $c = 2a$

- Opción correcta: b
- Solución:

Para que $P(x) = Q(x) = 0$ se tiene que $P(x) - Q(x) = (a-c)x^3 + (c-a)x = (a-c)x(x-1)(x+1) = 0$.

Esto nos dice que las posibles raíces comunes deben ser 0, 1 o -1 y no puede haber una raíz doble común. Ahora $x = 0$ no es raíz de ninguno de los polinomios.

Por otra parte $P(1) = Q(1) = 0$ implica que $a + b + c + 5 = 0$ y $P(-1) = Q(-1) = 0$ implica que $-a + b - c + 5 = 0$, de donde $b = -5$ y $a = -c$

5. Sean f y g funciones. Si g es lineal, $g(3) = 5$, $f(2) = 7$ y $g(x) \cdot g(x+1) = f(x) + 8$, entonces $f(3)$ es

   (a) 22

   (b) 23

   (c) 27

   (d) 35

- Opción correcta: c
- Solución:

  $f(2) = 7$ y $g(x) \cdot g(x+1) = f(x) + 8$, por lo que $g(2) \cdot g(3) = f(2) + 8$ y $g(2) \cdot g(3) = 15$.

  Como $g(3) = 5$, se tiene que $g(2) = 3$. Luego, como g es lineal, $g(3) = 5$ y $g(2) = 3$, el criterio de g es $g(x) = 2x - 1$.

  Como $g(x) \cdot g(x+1) = f(x) + 8$, se tiene que $(2x-1) \cdot (2(x+1)-1) = f(x) + 8 \Rightarrow 4x^2 - 9 = f(x)$.

  Finalmente, $f(3) = 27$.

6. Considere los números $p = n\left(n^2 - 1\right)$ con n entero y $1 \leq n \leq 2017$. La cantidad de números p que terminan en 0 es

   (a) 1209

   (b) 1210

   (c) 1211

   (d) 1212

- Opción correcta: b
- Solución:

  Como $p = n(n-1)(n+1)$, p es el producto de tres números consecutivos y el último dígito de un producto solo depende de los últimos dígitos de los factores, basta examinar los productos:

$n-1$	n	$n+1$	Termina
1	2	3	6
2	3	4	4
3	4	5	0
4	5	6	0
5	6	7	0
6	7	8	6
7	8	9	4
8	9	10	0
9	10	11	0
10	11	12	0

  Como hay una secuencia de $\{6, 4, 0, 0, 0\}$ y $2015 = 403 \cdot 5$, significa que de $n = 2$ a $n = 2017$ hay $403 \cdot 3 = 1209$ números p que terminan en cero; además, como el primer p es cero, hay 1210 en total.

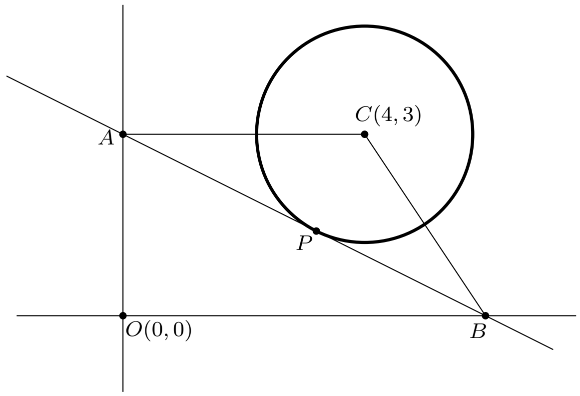
7. En la figura adjunta, A y B están en los ejes de coordenadas, la recta que contiene los puntos A y B tiene ecuación $x+2y=6$, C es el centro de la circunferencia, las coordenadas de C son $(4,3)$, la recta es tangente a la circunferencia en el punto P. El área del círculo de centro C es

   (a) 16π

   (b) $8\pi\sqrt{5}$

   (c) $\dfrac{16\pi}{5}$

   (d) $\dfrac{8\pi\sqrt{5}}{5}$



- Opción correcta: c
- Solución:

Considerando la ecuación de la recta $x+2y=6$, si $x=0 \Rightarrow y=3$ y si $y=0 \Rightarrow x=6$, por lo que $A\,(0,3)$ y $B\,(6,0)$.

Como el $\triangle AOB$ es un triángulo rectángulo, aplicando el teorema de Pitágoras se tiene que $AB=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$.

Así,

$$\begin{aligned} & (ABC) = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot PC \\ \Rightarrow\quad & \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{5}\cdot PC = 6 \\ \Rightarrow\quad & PC = \frac{6\cdot 2}{3\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

El área del círculo de centro C está dada por $\pi\cdot(PC)^2=\dfrac{16\pi}{5}$.

8. Si se tiene que n es un entero positivo y que la fracción $\dfrac{n^2+6n}{n+1}$ es un entero, entonces el valor de esta fracción es

   (a) 0

   (b) 5

   (c) 8

   (d) 15

- Opción correcta: c
- Solución:

  Como la fracción es entera entonces

$$\frac{(n^2+6n)-n(n+1)-5(n+1)}{n+1}=\frac{-5}{n+1}$$

  es un entero.

  Por lo tanto $n+1=5$ y el valor de la fracción es $\dfrac{4^2+6\cdot 4}{5}=8$.

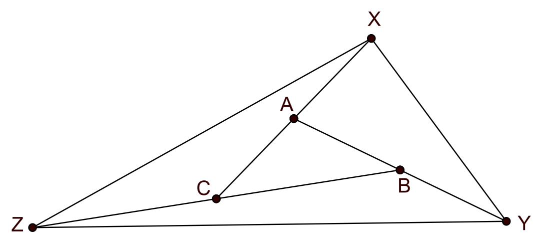
9. Los tres lados del $\triangle ABC$ se prolongan una distancia igual a sus respectivas longitudes, tal y como se observa la figura adjunta. Si el área del $\square XCBY$ es 18 cm^2, entonces el área en cm^2 del $\triangle XYZ$ es

   (a) 28

   (b) 30

   (c) 36

   (d) 42



- Opción correcta: d
- Solución:

  El $\triangle ABC$ tiene la misma base y la mitad de la altura del $\triangle AXY$ (esto con teorema de Tales o semejanza de triángulos al considerar las alturas desde B y desde Y sobre $\overline{AC}$ y $\overline{XC}$, respectivamente); por lo tanto, el $\triangle ABC$ tiene una área de 6 cm^2.

  En forma similar, los triángulos $\triangle ZCX$ y $\triangle ZBY$ tienen áreas iguales a 12 cm^2 cada uno (el doble del área del $\triangle ABC$).

  Por tanto el área del $\triangle XYZ$ es de 42 cm^2.

10. La cantidad máxima de valores enteros que puede tomar n para los cuales la ecuación $x^2 + nx - n = 0$ tenga soluciones enteras es

    (a) 1

    (b) 2

    (c) 3

    (d) 4

- Opción correcta: b

- Solución:

  Utilizando fórmula general, el discriminante de $x^2 + nx - n$ debe cumplior que $n^2 + 4n = k^2$, con k entero.

  Entonces $n^2+4n+4 = k^2+4 \Rightarrow (n+2)^2 = k^2+4 \Rightarrow (n+2)^2 - k^2 = 4 \Rightarrow (n+2+k)(n+2-k) = 4$.

  De lo anterior, se tienen los sistemas:

  $n + 2 + k = 1 \wedge n + 2 - k = 4$ con soluciones $k = \dfrac{-3}{2} \wedge n = \dfrac{1}{2}$

  $n + 2 + k = -1 \wedge n + 2 - k = -4$ con soluciones $k = \dfrac{3}{2} \wedge n = \dfrac{-9}{2}$

  $n + 2 + k = 4 \wedge n + 2 - k = 1$ con soluciones $k = \dfrac{3}{2} \wedge n = \dfrac{1}{2}$

  $n + 2 + k = -4 \wedge n + 2 - k = -1$ con soluciones $k = \dfrac{-3}{2} \wedge n = \dfrac{-9}{2}$

  $n + 2 + k = 2 \wedge n + 2 - k = 2$ con soluciones $k = 0 \wedge n = 0$

  $n + 2 + k = -2 \wedge n + 2 - k = -2$ con soluciones $k = 0 \wedge n = -4$

  De los cuales solo los dos últimos tienen soluciones enteras, con $n = 0$ y $n = -4$, que dan soluciones para x ($x = 0$ y $x = 2$).

  Por lo que la cantidad de valores de n enteros para los cuales la ecuación tiene soluciones enteras es 2.

11. Suponga que $P(x)$ es un polinomio de grado cuatro, con coeficiente principal igual a uno. Se sabe que para un número n, $P(n-2)=1$, $P(n-1)=1$, $P(n)=1$ y $P(n+1)=1$. El valor de $P(n+5)-P(n-4)$ es

    (a) 720

    (b) 360

    (c) 120

    (d) 0

- Opción correcta: a
- Solución:

  Sea $R(x)=P(x)-1$.

  De acuerdo con las hipótesis del enunciado, $n-2$, $n-1$, n y $n+1$ son ceros de $R(x)$; de esta manera:

$$R(x)=(x-(n-2))(x-(n-1))(x-n)(x-(n+1))$$

$$\Rightarrow P(x)=(x-n+2)(x-n+1)(x-n)(x-n-1)+1$$

  Entonces $P(n+5)-P(n-4)$ es

$$(n+5-n+2)(n+5-n+1)(n+5-n)(n+5-n-1)-(n-4-n+2)(n-4-n+1)(n-4-n)(n-4-n-1)=720$$

12. En una casa donde cuidan gatos hay camas para gatos y el cuidador observó que:

    - En cada cama que hay en la casa han dormido seis gatos.
    - Cada gato usó exactamente tres camas distintas.
    - Por cada posible trío de camas hubo exactamente uno y solo un gato que usó las tres camas.

    Se puede afirmar que el total de gatos en la casa es

    (a) 10

    (b) 15

    (c) 18

    (d) 21

- Opción correcta: a
- Solución:

  Si k denota la cantidad de camas, entonces como cada gato usó 3 camas distintas y por cada posible trío de camas hubo exactamente uno y solo un gato que usó las tres camas, por lo que la cantidad de gatos que hay en la casa es $\dfrac{k(k-1)(k-2)}{6}$.

  Como en cada cama que hay en la casa han dormido 6 gatos si relacionaramos las camas con los gatos, cada gato estaría relacionado con tres camas y cada cama con seis gatos, entonces $6k = 3 \cdot \dfrac{k(k-1)(k-2)}{6}$.

  Resolviendo la ecuación anterior se tiene que $k = 0$, $k = -2$ y $k = 5$.

  Como k es un número entero positivo por ser una cantidad, entonces $k = 5$; así, la cantidad de gatos es $\dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10$.

II Parte: Desarrollo **Valor 21 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. Sean x, y y z tres números reales positivos. Si se cumple simultáneamente que:

   - $\left(\sqrt[4]{\dfrac{x}{y}}+\sqrt[4]{\dfrac{y}{x}}\right)^2+\left(\sqrt[4]{\dfrac{x}{z}}+\sqrt[4]{\dfrac{z}{x}}\right)^2+\left(\sqrt[4]{\dfrac{z}{y}}+\sqrt[4]{\dfrac{y}{z}}\right)^2=2017$
   - $\sqrt{4xy}+\sqrt{4xz}+\sqrt{4yz}=4-x-y-z$

   Determine el valor de $\dfrac{1}{19\sqrt{x}}+\dfrac{1}{19\sqrt{y}}+\dfrac{1}{19\sqrt{z}}$

   Solución:

   De la primera expresión tenemos que:

   $\sqrt{\dfrac{x}{y}}+2+\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\sqrt{\dfrac{x}{z}}+2+\sqrt{\dfrac{z}{x}}+\sqrt{\dfrac{z}{y}}+2+\sqrt{\dfrac{y}{z}}=2017$

   $\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{x}{z}}\right)+\left(\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\sqrt{\dfrac{y}{z}}\right)+\left(\sqrt{\dfrac{z}{x}}+\sqrt{\dfrac{z}{y}}\right)=2011$

   $\sqrt{x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{z}}\right)-1+\sqrt{y}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{z}}\right)-1+\sqrt{z}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{z}}\right)-1=2011$

   $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{z}}\right)=2014$

   Por otra parte, $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}$ y con base en la segunda condición se tiene que $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2=4$ lo que implica que
   $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=2$.

   Luego, $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{z}}\right)=2014$

   $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{z}}=1007$

   Finalmente

   $$\frac{1}{19\sqrt{x}}+\frac{1}{19\sqrt{y}}+\frac{1}{19\sqrt{z}}=53$$

2. Considere el $\triangle ABC$, con $BC = 1$, $m\angle ABC = 60°$ y el radio del circuncírculo es $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Si D es otro punto en el circuncírculo del $\triangle ABC$, tal que $\overline{DC}$ pasa por el punto medio de $\overline{AB}$, determine DB.

Solución:

Sean O el centro del circuncírculo, E el punto medio de $\overline{AB}$ y F el punto medio de $\overline{BC}$; note que los triángulos $\triangle BFO$ y $\triangle CFO$ son congruentes por criterio L-L-L.

Así $m\angle BFO = 90°$; además $\triangle BFO$ y $\triangle CFO$ son especiales de $30° - 90° - 60°$, por lo que $m\angle OBA = 30° = m\angle OAB$.

Luego, $m\angle AOB = 120° = m\angle BOC$ y $m\angle COA = 360° - 120° - 120° = 120°$.

Por criterio L-A-L $\triangle AOB$, $\triangle BOC$ y $\triangle COA$ son congruentes, así, $AB = CA = BC = 1$, de donde el $\triangle ABC$ es equilátero de lado 1.

Así, $\overline{CD}$ pasa por O y $OE = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$, por lo que $DE = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. Por Pitágoras $DB = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3. En un torneo de fútbol durante la copa Europa–América, hubo nueve equipos más de Europa que de América. Cada pareja de equipos jugó exactamente una vez y, en total, los equipos europeos ganaron nueve veces tantos partidos como los ganados por los equipos americanos. Si no hubiera empates y el número de partidos ganados por los equipos americanos a los equipos europeos es seis, determine la cantidad de equipos americanos que participaron en dicha copa intercontinental.

Solución:

Sea n el número de equipos americanos y $n+9$ el número de equipos europeos. Los equipos americanos jugaron $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ partidos entre ellos y como no hubo empates ganaron en total $\dfrac{n(n-1)}{2} + 6$ partidos.

Similarmente, los equipos europeos jugaron $\binom{n+9}{2} = \dfrac{(n+8)(n+9)}{2}$ partidos entre ellos y ganaron $n(n+9)-6$ partidos contra equipos americanos, por lo que en total ganaron $\dfrac{(n+8)(n+9)}{2}+ n(n+9)-6$ partidos.

Luego:

$$
\begin{aligned}
9\left(\frac{n(n-1)}{2}+6\right) &= \frac{(n+8)(n+9)}{2}+n(n+9)-6 \\
\Rightarrow\ 3n^2-22n+24 &= 0 \\
\Rightarrow\ (3n-4)(n-6) &= 0 \\
\Rightarrow\ n=\frac{4}{3} \text{ o } n=6 &
\end{aligned}
$$

Como n es entero, se concluye que la cantidad de equipos americanos es 6.