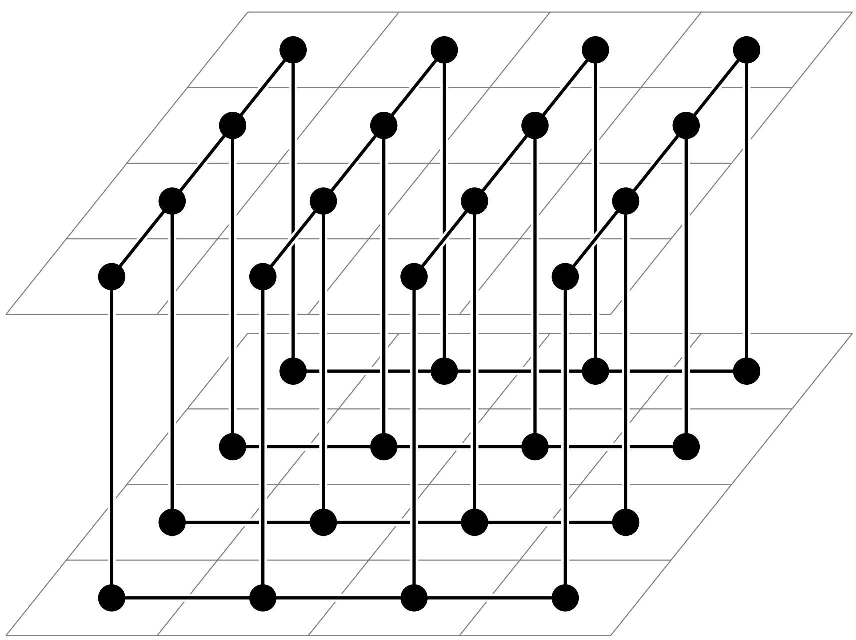
XXIX OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

MEP - UNA - UCR - MICITT - UNED - TEC

DÍA 1 – SOLUCIONES
BANCO DE PROBLEMAS



Nivel II

(8° – 9°)

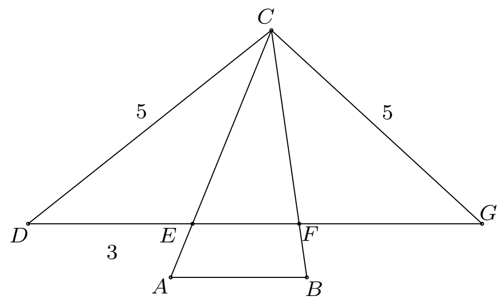
Lunes 13 de noviembre – Final 2017

GEOMETRÍA

1. Considere el $\triangle ABC$ y sean E y F puntos, tales que $A-E-C$, $B-F-C$ y $\overline{EF} \| \overline{AB}$. Sean D y G puntos tales que $D-E-F-G$. Si $m\angle CAB = 2m\angle DCE$, $m\angle FCG + m\angle DCE = m\angle ABC$, $\dfrac{DG}{AB} = \dfrac{7}{3}$ y $\dfrac{AC}{DC} = \dfrac{5}{3}$, determine $\dfrac{DC}{EF}$.

   Solución:

   Considere la figura:



Sea $\alpha = m\angle DEC$, entonces $m\angle CAB = 2\alpha$.

Sea $\beta = m\angle ABC$, entonces $m\angle FCG + \alpha = \beta \Rightarrow m\angle FCG = \beta - \alpha$

$m\angle CEF = m\angle CAB = 2\alpha$ y $m\angle CFE \leq m\angle ABC = \beta$

Luego $m\angle DEC = 180° - 2\alpha$ y $m\angle CFG = 180° - \beta$

En $\triangle DEC$ $m\angle EDC + (180° - 2\alpha) + \alpha = 180° \Rightarrow m\angle EDC = \alpha$

$\therefore \triangle DEC$ es isósceles con $DE = EC$

En $\triangle GFC$ $m\angle FGC + 180° - \alpha + \beta - \alpha = 180° \Rightarrow m\angle FGC = \alpha$

$\therefore \triangle DGC$ es isósceles con $DC = GC$

$\triangle ABC \sim \triangle EFC \Rightarrow \dfrac{EF}{AB} = \dfrac{EC}{AC} \Rightarrow EC = AC \cdot \dfrac{EF}{AB}$

$\triangle DBC \sim \triangle DCG \Rightarrow \dfrac{DE}{DC} = \dfrac{DC}{DB}$

$\Rightarrow DC^2 = DE \cdot DG$

$\Rightarrow DC^2 = EC \cdot DG$

$\Rightarrow DC^2 = AC \cdot \dfrac{EF}{AB} \cdot DG$

$\Rightarrow DC^2 = \dfrac{AC}{DC} \cdot EF \cdot \dfrac{DG}{AB}$

$\Rightarrow DC = \dfrac{5}{3} \cdot EF \cdot \dfrac{7}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{DC}{EF} = \dfrac{35}{9}$

2. Considere el rombo $ABCD$ con $\angle BAD = 60°$. Sean G y Z dos puntos distintos en el segmento AC y considere puntos E y X en $\overline{AD}$, F y Y en $\overline{DC}$, tales que $\square GEDF$ y $\square ZXDY$ son paralelogramos. Demuestre que $BEX \cong BFY$.

   Solución:

   Se va a mostrar que $BE = BF$.

   Note que EG paralela a DF así se tiene que $\angle GAE = \angle ACD = \angle AGE$, de donde $AE = FG = DF$.

   Note que $\triangle ABD$ es equilátero, así $BA = BD$, y además $\angle BDF = 60 = \angle BAE$.

   Por criterio de congruencia L.A.L se concluye que $\triangle BAE$ y $\triangle BDF$ son congruentes, por lo que $BE = BF$.

   Análogamente $\triangle BAX$ y $\triangle BDY$ son congruentes y $BX = BY$.

   Note que $\angle EBX = \angle ABX - \angle ABE = \angle DBY - \angle DBF = \angle FBY$ y como $BE = BF$, $BX = BY$ se tiene por criterio de congruencia L.A.L que $\triangle BEX \cong \triangle BFY$.

TEORÍA DE NÚMEROS

3. Encuentre todos los enteros positivos n tales que $3^n + 5^n$ es múltiplo de $3^{n-1} + 5^{n-1}$.

   Solución:

   Como 3^n+5^n es múltiplo de $3^{n-1}+5^{n-1}$ se buscan los enteros k tales que $3^n+5^n = k(3^{n-1}+5^{n-1})$

   Ahora,

   $3^n + 5^n = 3^n + 5 \cdot 5^{n-1} > 3^n + 3 \cdot 5^{n-1} = 3 \cdot 3^{n-1} + 3 \cdot 5^{n-1} = 3(3^{n-1} + 5^{n-1})$

   $\to 3^n + 5^n > 3(3^{n-1} + 5^{n-1})$

   De forma análoga,

   $3^n + 5^n = 3 \cdot 3^{n-1} + 5^n < 5 \cdot 3^{n-1} + 5^n = 5 \cdot 3^{n-1} + 5 \cdot 5^{n-1} = 5(3^{n-1} + 5^{n-1})$

   $\to 3^n + 5^n < 5(3^{n-1} + 5^{n-1})$

   Así, $3(3^{n-1} + 5^{n-1}) < 3^n + 5^n < 5(3^{n-1} + 5^{n-1})$ Por lo que $k = 4$ y se sigue que

   $$\begin{aligned} 3^n + 5^n = 4(3^{n-1} + 5^{n-1}) &\to 5^n - 4 \cdot 5^{n-1} = 4 \cdot 3^{n-1} - 3^n \\ &\to 5 \cdot 5^{n-1} - 4 \cdot 5^{n-1} = 4 \cdot 3^{n-1} - 3 \cdot 3^{n-1} \\ &\to 5^{n-1} = 3^{n-1} \end{aligned}$$

   Y como n es entero positivo el único valor posible es cuando $n - 1 = 0$, es decir, $n = 1$ el cual cumple pues $3^1 + 5^1 = 8$ es múltiplo de $3^0 + 5^0 = 2$.

4. Carlos juega un juego con las siguientes reglas:

   - Se da un número natural N cualquiera.
   - Si $N = a + b$, donde a y b son naturales, entonces se puede cambiar N por $M = ab$.

   Por ejemplo, si se tiene $5 = 3 + 2$, se puede cambiar por $6 = 3 \cdot 2$.

   a) Determine una secuencia de movimientos que comience con $N = 7$ y lleve a $K = 48$.

b) Suponga que Carlos comienza con un número natural $N \geq 5$. Dé una secuencia de pasos que lleve a un número natural K, cualquiera.

Solución:

(a) $7 = 5 + 2 \to 5 \cdot 2 = 10 = 2 + 8 \to 2 \cdot 8 = 16 = 12 + 4 \to 12 \cdot 4 = 48$.

(b) Sea $N \geq 5$ un número natural. Sea K cualquier número entero. Se evidenciará una secuencia de pasos que lleva al número K. Primero observe que, como $N \geq 5$, entonces, haciendo la descomposición $N = (N-2)+2$, se obtiene $N_1 = 2(N-2) \geq 2 \cdot 3 = 6$. Repitiendo este proceso se obtiene

$$N_1 = 2 + (N_1 - 2) \to N_2 = 2(N_1 - 2) \geq 2 \cdot 4 = 8 = 4 + 2^2,$$

$$N_2 = 2 + (N_2 - 2) \to N_3 = 2(N_2 - 2) \geq 2 \cdot 6 = 12 = 4 + 2^3,$$

$$N_3 = 2 + (N_3 - 2) \to N_4 = 2(N_3 - 2) \geq 2 \cdot 10 = 20 = 4 + 2^4,$$

$$\vdots$$

$$N_r = 2 + (N_r - 2) \to N_{r+1} = 2(N_r - 2) \geq 2 \cdot 10 = 20 = 4 + 2^{r+1},$$

donde r es un número natural.

Ahora, se escoge r de modo que $4 + 2^{r+1} \geq K$, luego, $N_{r+1} \geq K$. A continuación, se utiliza que $N_{r+1} = 1 + (N_{r+1} - 1)$, entonces $N_{r+2} = 1 \cdot (N_{r+1} - 1)$, es decir,

$$N_{r+2} = N_{r+1} - 1,$$

repitiendo este proceso, se desciende un número a cada paso, y como $N_{r+1} \geq K$, necesariamente $N_j = K$, para $j \geq r+1$.

RAZONAMIENTO LÓGICO

5. En un aula hay 16 personas, donde cada persona conoce a exactamente tres personas (la relación es mutua). Determine si es posible o no repartir siempre a las 16 personas en ocho parejas, de tal forma que las personas en cada pareja se conozcan.

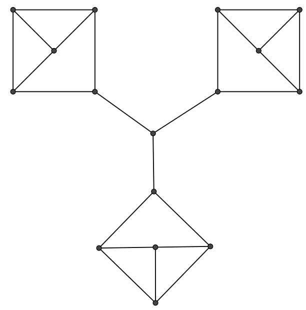
Solución:

No siempre es posible.

Se puede probar que 16 es el menor número de personas que debe tener un aula en el que cada persona conoce a exactamente tres personas para que no sea posible repartirlos en parejas de tal forma que no haya dos personas en la misma pareja y que las personas en cada pareja se conozcan.

Un ejemplo en el que no es posible se muestra en la siguiente gráfica, donde los puntos corresponden a las personas y dos puntos están unidos si las personas se conocen.

Es imposible escoger ocho líneas que no se toquen y que cubran todos los puntos de la gráfica.



6. Carlos juega con Luis el juego llamado *AMOCLO*. En este juego se cuenta con varios puños de bolitas, el tamaño de los puños se puede modificar siguiendo las reglas:

   - Se pueden juntar dos puños de bolitas en uno solo.
   - Si un puño tiene un número par de bolitas, se puede dividir en dos puños con el mismo número de bolitas cada uno.

   En determinado momento el juego AMOCLO cuenta con tres puños, uno de 5 bolitas, otro de 49 bolitas y el último de 51 bolitas.

   Carlos le pide a Luis que jueguen hasta lograr 105 puños de bolitas y el que lo logre será el ganador. Sin embargo, Luis le indica que el juego, bajo esas condiciones, no tendría ganador.

   Pruebe que la afirmación de Luis es verdadera.

   Solución:

   En el primer movimiento se tiene que juntar dos de los tres puños de bolitas ya que ninguno de los tres tiene una cantidad par de bolitas, si se junta los puños de 49 y 51 entonces en el siguiente paso la cantidad de bolitas será múltiplo de 5.

   Ahora bien, los posibles pasos son dividir el puño que tiene cantidad par o bien sumar los puños. Los pasos siguientes igual se tendrán cantidad de bolitas múltiplo de 5, por lo que es imposible conseguir puños de una bolita.

   En las otras opciones de juntar dos puños se tendría 5 más 49, esto daría un puño de 44 y otro de 51, ambos son múltiplos de 3, utilizando el mismo análisis se concluye que es imposible lograr puños de una bolita.

   La última posibilidad es juntar 5 y 51, por lo que quedaría puños de 49 y 56, ambos múltiplos de 7, análogamente se concluye lo mismo.

   Observe que se tiene un total de 105 bolitas.

   Por lo tanto, como lo indica Luis, es imposible obtener un ganador.