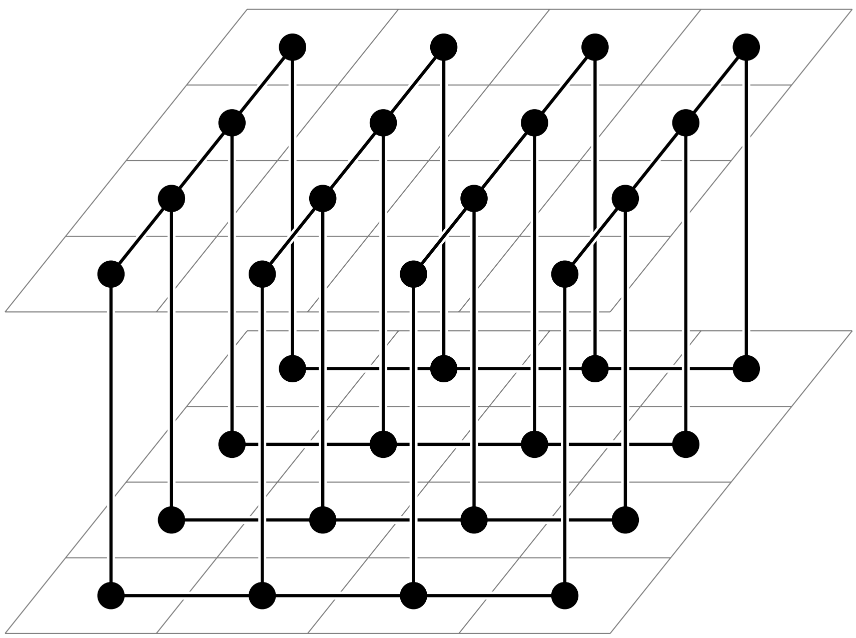
XXIX OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

MEP - UNA - UCR - MICITT - UNED - TEC

SOLUCIÓN
SEGUNDA ELIMINATORIA NACIONAL



II Nivel

$(8^\circ - 9^\circ)$

2017

Estimado estudiante:

La Comisión Organizadora de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas le saluda y felicita por haber clasificado a la segunda eliminatoria nacional de estas justas académicas. La prueba consta de dos partes: una primera parte de 12 preguntas de selección única, ponderadas con dos puntos cada respuesta correcta, y una segunda parte con tres preguntas de desarrollo, con un valor de siete puntos cada solución correcta.

Los resultados de esta eliminatoria se publicarán a partir del lunes 02 de octubre, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en las hojas de respuestas que se le han entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en las hojas de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 pts c/u**

1. Sofía tiene cierta cantidad de caramelos; se come 30 % de ellos y le quedan 280 caramelos. Carol tiene la misma cantidad de caramelos que Sofía, pero se come 26 % de ellos. La cantidad de caramelos que Carol se come es

   (a) 30

   (b) 84

   (c) 104

   (d) 296

- Opción correcta: c
- Solución:

  Sofía tiene x caramelos, se come 30 %, le queda 70 %. Es decir, le quedan $\dfrac{70x}{100}$ caramelos, lo cual es 280 caramelos.

  De $\dfrac{70x}{100} = 280$ se tiene que $x = 400$.

  Sofía tiene entonces 400 caramelos, pero Carol se come 26 % de ellos; es decir, $\dfrac{400 \cdot 26}{100} = 104$ caramelos.

2. Sea el $\square ABCD$ un cuadrado en el que $AB = 3$. Sea E un punto tal que $B - C - E$ y sea F el punto de intersección de $\overline{AE}$ y $\overline{CD}$. Si $BE = 4$, entonces el área del $\square ABCF$ es

   (a) $4\frac{1}{4}$

   (b) $5\frac{3}{8}$

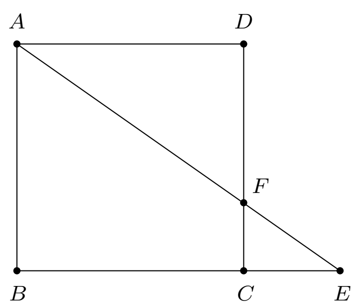
   (c) $5\frac{1}{2}$

   (d) $5\frac{5}{8}$

- Opción correcta: d

- Solución:

  Considere al figura



Se tiene que $\overline{AB} \parallel \overline{FC}$ entonces $\triangle FCE \sim \triangle ABE$, entonces

$$\frac{FC}{AB} = \frac{CE}{BE} \Rightarrow \frac{FC}{3} = \frac{1}{4} \Rightarrow FC = \frac{3}{4}$$

El $\square ABCF$ es un trapecio, entonces

$$(ABCF) = \frac{(CF + AB)BC}{2} = \frac{\left(\frac{3}{4} + 3\right) \cdot 3}{2} = \frac{45}{8} = 5\frac{5}{8}$$

3. En el número 213 se tiene que 3 divide a 21. La cantidad de números de tres dígitos que cumplen que el dígito de las unidades divide al número formado por los dígitos de las centenas y decenas es

   (a) 112

   (b) 153

   (c) 254

   (d) 360

- Opción correcta: c
- Solución:

  Se hace el conteo para cada una de las opciones del tercer dígito.

Caso 1: Si este es 0, no hay ninguno, ya que 0 no es divisor de ningún número.
Caso 2: Si es 1, hay $\lfloor \frac{99}{1} \rfloor - \lfloor \frac{9}{1} \rfloor = 90$ múltiplos de dos dígitos de 1.
Caso 3: Si es 2, hay $\lfloor \frac{99}{2} \rfloor - \lfloor \frac{9}{2} \rfloor = 45$ múltiplos de dos dígitos de 2.
Caso 4: Si es 3, hay $\lfloor \frac{99}{3} \rfloor - \lfloor \frac{9}{3} \rfloor = 30$ múltiplos de dos dígitos de 3.
Caso 5: Si es 4, hay $\lfloor \frac{99}{4} \rfloor - \lfloor \frac{9}{4} \rfloor = 22$ múltiplos de dos dígitos de 4.
Caso 6: Si es 5, hay $\lfloor \frac{99}{5} \rfloor - \lfloor \frac{9}{5} \rfloor = 18$ múltiplos de dos dígitos de 5.
Caso 7: Si es 6, hay $\lfloor \frac{99}{6} \rfloor - \lfloor \frac{9}{6} \rfloor = 15$ múltiplos de dos dígitos de 6.
Caso 8: Si es 7, hay $\lfloor \frac{99}{7} \rfloor - \lfloor \frac{9}{7} \rfloor = 13$ múltiplos de dos dígitos de 7.
Caso 9: Si es 8, hay $\lfloor \frac{99}{8} \rfloor - \lfloor \frac{9}{8} \rfloor = 11$ múltiplos de dos dígitos de 8.
Caso 10: Si es 9, hay $\lfloor \frac{99}{9} \rfloor - \lfloor \frac{9}{9} \rfloor = 10$ múltiplos de dos dígitos de 9.

Sumando todas las opciones tenemos que en total son 254.

4. En la ecuación $O \cdot L \cdot (C + O + M + A) = 77$ cada letra corresponde a un dígito diferente $(0, 1, 2, \ldots, 9)$. En este caso, las dos letras O toman valores distintos. La cantidad de maneras diferentes en que se pueden escoger los valores de las letras es

   (a) 96

   (b) 60

   (c) 48

   (d) 24

- Opción correcta: a
- Solución:

  Dado que $77 = 7 \cdot 11 = 1 \cdot 7 \cdot 11$, quiere decir que para O y L la única posibilidad para los valores es $\{O, L\} = \{1, 7\}$, que son dos posibilidades.

  Luego, para que cuatro dígitos distintos sumen 11, excluyendo al 1 y al 7, la únicas posibilidades son que $\{C, O, M, A\} = \{0, 2, 4, 5\}$ o que $\{C, O, M, A\} = \{0, 2, 3, 6\}$, de donde el número de posibilidades para cada caso es de $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, por lo que en total el número de manera diferentes es de $2\,(24 + 24) = 96$.

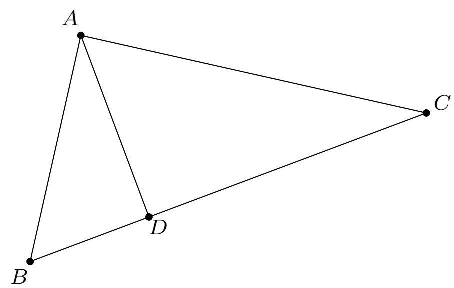
5. En la figura adjunta, el $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo con $m\angle BAC = 90°$ y $\overline{AD} \perp \overline{BC}$. Si $BC = 5$ y $AC = 4$, entonces el área del $\triangle ADC$ es

   (a) 4

   (b) 5

   (c) $\dfrac{54}{25}$

   (d) $\dfrac{96}{25}$



- Opción correcta: d
- Solución:

Con base en el teorema de Pitágoras aplicado en el $\triangle ABC$, se tiene que

$$\begin{aligned} & AB^2 + AC^2 = BC^2 \\ \Rightarrow\ & AB^2 = 25 - 16 = 9 \\ \Rightarrow\ & AB = 3 \end{aligned}$$

En los triángulos rectángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DAC$ los ángulos agudos $\angle ABC$ y $\angle DAC$ son congruentes, ya que $\angle BAC \cong \angle ADC$ (ángulos rectos) y $\angle ACB \cong \angle DCA$ (mismo ángulo), por lo que $\triangle ABC \sim \triangle DAC$; así, $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow DA = \dfrac{3}{4}DC$.

Aplicando el teorema de Pitágoras en el $\triangle ADC$ se tiene que

$$\begin{aligned} & DA^2 + DC^2 = AC^2 \\ \Rightarrow\ & \left(\frac{3}{4}DC\right)^2 + DC^2 = 4^2 \\ \Rightarrow\ & \frac{9}{16}DC^2 + DC^2 = 16 \\ \Rightarrow\ & \frac{25}{16}DC^2 = 16 \\ \Rightarrow\ & DC^2 = 16 \cdot \frac{16}{25} \\ \Rightarrow\ & DC = \frac{16}{5} \end{aligned}$$

Por lo que $DA = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{16}{5} = \dfrac{12}{5}$ y $(ADC) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{16}{5} \cdot \dfrac{12}{5} = \dfrac{96}{25}$.

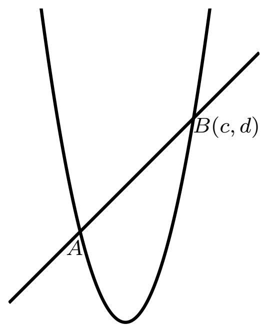
6. En la figura adjunta están representadas las ecuaciones $y = x - 1$ y $y = x^2 + ax + b$. Los puntos A y B son los puntos de intersección entre la recta y la parábola. Si las coordenadas del punto A son $(1, 0)$ y el punto $(0, 5)$ pertenece a la parábola, entonces las coordenadas del punto B son

   (a) $(4, 3)$

   (b) $(5, 4)$

   (c) $(6, 5)$

   (d) $(7, 6)$



- Opción correcta: c
- Solución:

  Como $(0, 5)$ pertenece a la parábola, satisface la ecuación $y = x^2 + ax + b$; así, $b = 5$.

  Como $A\,(1, 0)$ pertenece a la parábola, satisface la ecuación $y = x^2 + ax + 5$; así, $a = -6$.

  Con lo anterior, la ecuación de la parábola es $y = x^2 - 6x + 5$.

  El punto $B\,(c, d)$ satisface tanto la ecuación de la recta como la ecuación de la parábola, por lo que $d = c - 1$ y $d = c^2 - 6c + 5$. Luego,

$$\begin{aligned} & c^2 - 6c + 5 = c - 1 \\ \Rightarrow\quad & c^2 - 7c + 6 = 0 \\ \Rightarrow\quad & (c-1)(c-6) = 0 \\ \Rightarrow\quad & c = 1 \;\vee\; c = 6 \end{aligned}$$

  Uno de los puntos es $A\,(1, 0)$ y el otro punto es $B\,(6, 5)$.

7. Una *suma circular* de dos números se define como sumar ambos números y restarle o sumarle seis las veces necesarias para que el resultado esté entre 1 y 6, inclusive.
   Por ejemplo, la *suma circular* de 8 y 9 es $17-6-6=5$, y la *suma circular* de 4 y -7 es $-3+6=3$.
   Carlos y Karla juegan a lo siguiente: Karla elige un número y luego Carlos lanza un dado, si el resultado del dado es mayor o igual que la suma circular de este y el número de Karla, entonces Carlos gana (en caso contrario gana Karla).
   Si Karla puede elegir solo algún valor del conjunto $\{-2,-1,2,3\}$, entonces el número que debe elegir Karla para tener más posibilidad de ganar es

   (a) -2

   (b) -1

   (c) 2

   (d) 3

- Opción correcta: c
- Solución:

  Si Karla elige el 2, entonces solo puede perder si el resultado del dado es 5 o 6, con lo que la suma circular sería 1 y 2 respectivamente (ya que $5>1$ y $6>2$); si el resultado del dado es otro, Karla gana.

  En los otros casos se puede ver como Carlos gana en más de dos casos.

  Para -2, Carlos gana con 3, 4, 5 o 6 como resultado del dado; para -1, Carlos gana con 2, 3, 4, 5 o 6 como resultado del dado; y para 3, Carlos gana con 4, 5 o 6 como resultado en el dado.

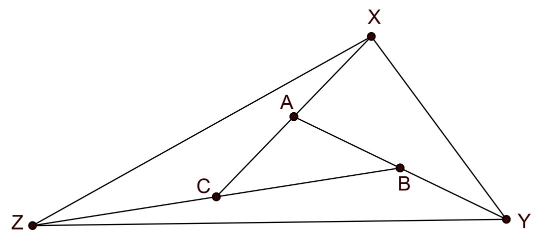
8. Los tres lados del $\triangle ABC$ se prolongan una distancia igual a sus respectivas longitudes, tal y como se observa en la figura adjunta. Si el área del $\square XCBY$ es 18 cm^2, entonces el área en cm^2 del $\triangle XYZ$ es

   (a) 28

   (b) 30

   (c) 36

   (d) 42



- Opción correcta: d
- Solución:

  El $\triangle ABC$ tiene la misma base y la mitad de la altura del $\triangle AXY$ (esto con teorema de Tales o semejanza de triángulos al considerar las alturas desde B y desde Y sobre $\overline{AC}$ y $\overline{XC}$, respectivamente); por lo tanto, el $\triangle ABC$ tiene una área de 6 cm^2.

  En forma similar, los triángulos $\triangle ZCX$ y $\triangle ZBY$ tienen áreas iguales a 12 cm^2 cada uno (el doble del área del $\triangle ABC$).

  Por tanto el área del $\triangle XYZ$ es de 42 cm^2.

9. Considere la ecuación cuadrática $x^2 + \frac{p}{3}x + q - 5 = 0$ en la que p y q son constantes reales. Si $p + q$ es un número primo y la ecuación posee una única solución real, entonces $p + q$ es

   (a) 2

   (b) 3

   (c) 5

   (d) 7

- Opción correcta: c
- Solución:

  Denote n: única solución de la ecuación cuadrática $x^2 + \frac{p}{3}x + q - 5 = 0$.

  Luego, $x^2 + \frac{p}{3}x + q - 5 = 0$ se puede escribir como $(x - n)^2 = x^2 - 2nx + n^2 = 0$.

  Luego, $-2n = \frac{p}{3}$ y $n^2 = q-5$, de donde $p = -6n$, $q = n^2+5$ y $p+q = n^2-6n+5 = (n-5)(n-1)$.

  Como $p + q$ es un número primo, hay dos posibles casos:

  1) $n - 5 = 1$, $n = 6$ y $n - 1 = 5$

  2) $n - 1 = 1$, $n = 2$ y $n - 5 = -3$

  En el primer caso $p + q = 5$ y en el segundo $p + q = -3$. El segundo caso no puede darse pues $p + q$ es un número primo. Así, $p + q = 5$.

10. Considere los números $p = n\left(n^2 - 1\right)$ con n entero y $1 \leq n \leq 2017$. La cantidad de números p que terminan en 0 es

    (a) 1209

    (b) 1210

    (c) 1211

    (d) 1212

- Opción correcta: b
- Solución:

  Como $p = n(n-1)(n+1)$, p es el producto de tres números consecutivos y el último dígito de un producto solo depende de los últimos dígitos de los factores, basta examinar los productos:

$n-1$	n	$n+1$	Termina
1	2	3	6
2	3	4	4
3	4	5	0
4	5	6	0
5	6	7	0
6	7	8	6
7	8	9	4
8	9	10	0
9	10	11	0
10	11	12	0

  Como hay una secuencia de $\{6, 4, 0, 0, 0\}$ y $2015 = 403 \cdot 5$, significa que de $n = 2$ a $n = 2017$ hay $403 \cdot 3 = 1209$ números p que terminan en cero; además, como el primer p es cero, hay 1210 en total.

11. Sean a, b y c números reales, con $a \neq c$. Sean

$$P(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 2$$

$$Q(x) = 3x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 2$$

Las condiciones que deben cumplir los números a, b y c para que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ tengan dos raíces comunes son

(a) $a = 3$ y $b = c$

(b) $b = -5$ y $a = -c$

(c) $c = -3$ y $a = b$

(d) $b = 5$ y $c = 2a$

- Opción correcta: b
- Solución:

Para que $P(x) = Q(x) = 0$ se tiene que $P(x) - Q(x) = (a-c)x^3 + (c-a)x = (a-c)x(x-1)(x+1) = 0$.

Esto nos dice que las posibles raíces comunes deben ser 0, 1 o -1 y no puede haber una raíz doble común. Ahora $x = 0$ no es raíz de ninguno de los polinomios.

Por otra parte $P(1) = Q(1) = 0$ implica que $a + b + c + 5 = 0$ y $P(-1) = Q(-1) = 0$ implica que $-a + b - c + 5 = 0$, de donde $b = -5$ y $a = -c$

12. La cantidad de números enteros positivos k, múltiplos de siete, que cumplen que el producto de sus dígitos es igual a $\dfrac{19k - 2808}{8}$ es

    (a) 0

    (b) 1

    (c) 2

    (d) 3

- Opción correcta: b

- Solución:

  Como el producto $\dfrac{19k - 2808}{8} = \dfrac{19k}{8} - 351$ es un número entero, entonces $8|k$ y por lo tanto $k = 8n$, para algún $n \in \mathbb{Z}$, lo que significa que k es par y el producto de sus dígitos $19n - 351$ también es par. De lo anterior se tiene que n tiene que ser impar y $n \geq 19$.

  Por otra parte, el producto de los dígitos de k es menor que k, (en efecto, sea k tal que $k = a_n 10^{n-1} + \cdots + 10a_1 + a_0 \geq a_n 10^{n-1} > a_n 9^{n-1} \geq a_n \cdot a_{n-1} \cdots a_0$) es decir $19n - 351 < 8n$ lo que significa que $n < 31$, pero k es múltiplo de 7 y, por lo tanto, $n = 21$; al comprobar se tiene que $k = 168$ cumple lo establecido.

II Parte: Desarrollo **Valor 21 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. Considere el número de 28 dígitos de la forma

$$1\,223\,334\,444\,555\,556\,666\,667\,777\,777$$

Determine la menor cantidad de dígitos que deben cambiarse para que el número resultante sea divisible por 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

Solución:

Para que el número sea divisible por 5 debe terminar en 0 o 5, pero para que también sea divisible por 2 debe terminar en par, por lo tanto, debe cambiarse el último 7 por un 0.

Por otro lado, para que sea divisible por 4, el número formado por los dos últimos dígitos debe ser divisible por 4. Vemos que 70 no es divisible por 4, por lo que debe cambiarse el siguiente 7 por un número par (0, 2, 4, 6, 8).

Además, para que sea divisible por 3, la suma de los dígitos debe ser múltiplo de 3, y esto será suficiente para que también sea divisible por 6 (pues entonces será divisible por 2 y 3).

La suma de los dígitos del número original es $1+4+9+16+25+36+49=140$, pero al cambiar el último 7 por un 0, la suma será 133. Como además se debe cambiar otro 7 por 8, 6, 4, 2 o 0, debemos asegurarnos de que la suma de los dígitos se múltiplo de 3. Lo anterior se puede lograr únicamente al cambiar el penúltimo siete por un seis o por un cero, pues esto resta 1 a la suma de los dígitos (en el caso del seis) y la suma será 132; en el otro caso la suma será 126 (cuando es cero el usado).

Por lo tanto, basta cambiar dos dígitos (los últimos)

$$1\,223\,334\,444\,555\,556\,666\,667\,777\,760$$

$$1\,223\,334\,444\,555\,556\,666\,667\,777\,700$$

2. Un colegio organiza un campeonato de fútbol sala. Participan seis equipos; en cada ronda juegan todos los equipos, de modo que se juegan tres partidos por jornada. Al final del campeonato, todos han jugado exactamente una vez contra los demás equipos. El equipo ganador de un partido gana tres puntos, el que pierde no obtiene puntos, y si hay empate cada equipo gana un punto.

   a) Si al final de la segunda jornada se sabe que solo un partido terminó en empate, determine si es posible que todos los equipos tengan puntuaciones diferentes.

   b) Al final del campeonato se sabe que hubo exactamente 11 partidos que terminaron en empate. Si todos los equipos tienen diferentes puntuaciones, determine el menor puntaje posible para el equipo que queda en primer lugar del campeonato.

Solución:

a) Al final de la segunda jornada los resultados posibles son 0, 1, 3, 4 o 6, pues un equipo dado como máximo empató en un juego. Como hay 5 resultados posibles y 6 equipos, entonces hay dos equipos que tienen la misma puntuación y así, no es posible que todos los equipos tengan puntuaciones diferentes.

b) Si k es la puntuación del primer lugar y todas las puntuaciones son distintas, entonces la suma de los puntos de todos los equipos es como máximo

$$k + (k-1) + (k-2) + (k-3) + (k-4) + (k-5) = 6k - 15$$

Como de los 15 partidos 11 terminaron en empate, de estos se distribuyen $11 \cdot 2 = 22$ puntos. De los restantes 4 partidos, algún equipo tiene que haber ganado, de modo que se distribuye $4 \cdot 3 = 12$ puntos; es decir, la suma total debe ser igual a $22 + 12 = 34$ puntos. Luego, debe cumplirse que

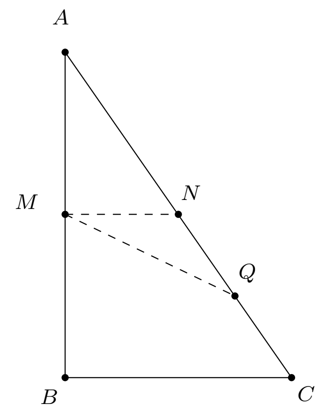
$$6k - 15 \geq 34 \Rightarrow k \geq 9$$

Para comprobar que esto, basta dar un ejemplo de tal situación. En la tabla siguiente se marca en la intersección de la fila i con la columna j con la cantidad de puntos ganados por el equipo i en ese partido.

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	Total
E_1	$\times$	1	1	1	0	0	3
E_2	1	$\times$	1	1	1	0	4
E_3	1	1	$\times$	1	1	1	5
E_4	1	1	1	$\times$	3	1	7
E_5	3	1	1	0	$\times$	1	6
E_6	3	3	1	1	1	$\times$	9

3. Sea el $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo, tal que $m\angle ABC = 90°$ y $AB = 12$ cm. Sea Q un punto tal que $A - Q - C$ y $AQ = 3CQ$. Si M el punto medio de $\overline{AB}$ y el área del $\square BMQC = 30$ cm^2, determine CQ.

Solución:



Sea N el punto medio de $\overline{AC}$, así tenemos:

$AQ + CQ = AC \Rightarrow 3CQ + CQ = AC \Rightarrow CQ = \dfrac{1}{4}AC = \dfrac{1}{2}CN$

$\overline{BC} \parallel \overline{MN}$ y $BC = 2MN$.

Si h es la medida de la altura del $\triangle MNQ$ desde el punto Q, entonces $h = \dfrac{1}{2}BM = \dfrac{1}{4}AB = 3$ cm.

Así tenemos:

$$\begin{aligned}
(BMNC) = (MNQ) + (BMQC) \quad &\Rightarrow \quad (BMNC) = \frac{1}{2}(MN + BC) \cdot BM = \frac{1}{2}MN \cdot h + 30 \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(MN + 2MN) \cdot \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}MN \cdot 3 + 30 \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2}3MN \cdot \frac{1}{2}12 = \frac{1}{2}MN \cdot 3 + 30 \\
&\Rightarrow \quad 9MN = \frac{3}{2}MN + 30 \\
&\Rightarrow \quad 9MN - \frac{3}{2}MN = 30 \\
&\Rightarrow \quad \frac{15}{2}MN = 30 \\
&\Rightarrow \quad MN = 4
\end{aligned}$$

Así, se tiene que $BC = 8$ cm. y por Pitágoras se tiene que

$12^2 + 8^2 = AC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{208}$ cm. $= 2\sqrt{52}$ cm.

Por lo tanto, $CQ = \dfrac{\sqrt{52}}{2}$ cm.