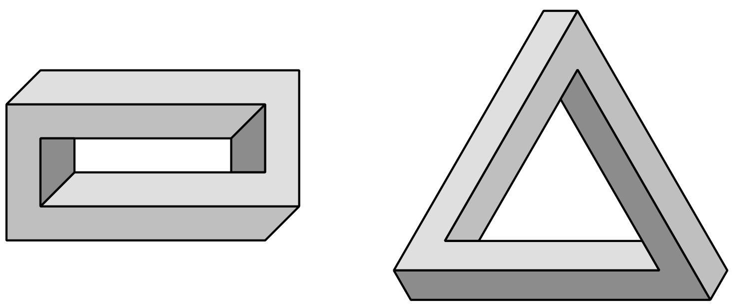
XXIX OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

MEP - UNA - UCR - MICITT - UNED - TEC

DÍA 1 – SOLUCIONES
BANCO DE PROBLEMAS



Nivel I

(7°)

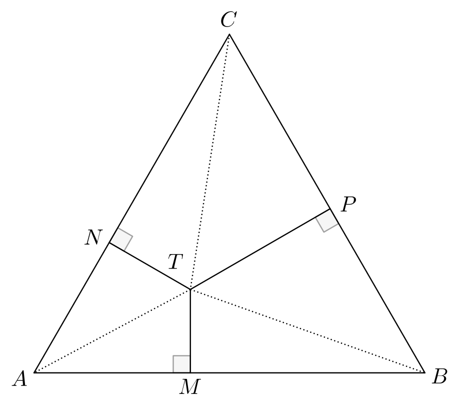
Lunes 13 de noviembre – Final 2017

GEOMETRÍA

1. Sean $\triangle ABC$ un triángulo equilátero y T un punto en su interior. Sean M, N y P puntos, tales que $A - M - B$, $B - P - C$, $A - N - C$, $\overline{AB} \perp \overline{TM}$, $\overline{BC} \perp \overline{TP}$ y $\overline{AC} \perp \overline{TN}$. Pruebe que $(ABC) = \dfrac{(TM + TN + TP)(BP + PC)}{2}$

   Solución:

   De acuerdo con la información dada y al trazar los segmentos $\overline{AT}, \overline{BT}, \overline{CT}$ en el triángulo, se obtiene la siguiente figura:



   Entonces,

   $(ABC) = (ATB) + (BTC) + (ATC)$

   $(ABC) = \dfrac{AB \cdot TM}{2} + \dfrac{BC \cdot TP}{2} + \dfrac{AC \cdot TN}{2}$

   $(ABC) = \dfrac{AB \cdot TM + BC \cdot TP + AC \cdot TN}{2}$

   Como el triángulo ABC es equilátero, se tiene que $BC = AB = AC$.

   Entonces,

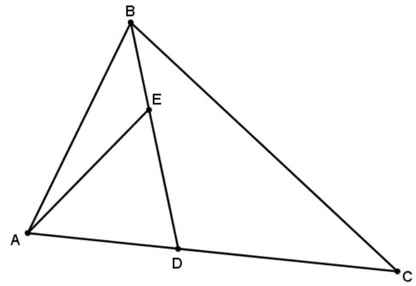
   $(ABC) = \dfrac{BC \cdot TM + BC \cdot TP + BC \cdot TN}{2}$

   $(ABC) = \dfrac{BC(TM + TP + TN)}{2}$

   Como $BC = BP + PC$, se llega a la prueba planteada que

   $(ABC) = \dfrac{(BP + PC)(TM + TP + TN)}{2}$

2. En el triángulo ABC de la figura adjunta, se tiene que el $\angle ABD$ mide $36°$, el $\angle BCA$ mide el doble del $\angle BAE$, $AD = ED$ y $AC = BC$. Determine la medida del $\angle BAE$.



Solución:

Sea x la medida del $\angle BAE$.

Como el $\angle BCA$ mide el doble del $\angle BAE$, el $\angle BCA$ mide $2x$.

Luego, el $\angle AED$ mide $36° + x$ (Pues es ángulo externo de un triángulo AEB).

Como $AD = ED$, el $\angle EAD$ mide $36° + x$.

Además, el $\angle BAC$ mide $36° + 2x$.

Luego, como $AC = BC$, el $\angle ABC$ mide $36° + 2x$.

Así, $36° + 2x + 36° + 2x + 2x = 180°$ y $x = 18°$.

TEORÍA DE NÚMEROS

3. ¿Existen 14 números enteros positivos consecutivos, cada uno de ellos divisibles por uno o más primos menores que 12?

Solución:

La respuesta es no, ya que:

- De los 14 números, 7 de ellos son pares, por tanto divisible por 2.
- Vamos a probar que de los 7 restantes al menos 1 no es divisible por $3, 5, 7, 11$.
  - De los 7 impares, a lo sumo 3 son divisibles por 3, a lo sumo 2 son divisibles por 5, únicamente 1 es divisible por 7 y únicamente 1 es divisible por 11.
  - Pero para que 3 sean divisible por 3, se tiene que dar que el primero, el del centro y el ultimo sean múltiplos de 3. Eso significa que la diferencia entre los que sobran es menor que 10, por consiguiente solo 1 será divisible por 5. Quiere decir que de los 7 impares, a los sumo tendríamos 3 son divisibles por 3, y 3 divisible por $5, 7, 11$ respectivamente, por tanto habrá al menos uno no divisible por ellos.

4. Determine todos los números n de la forma $n = abcabc$, con a, b y c dígitos distintos, tales que n sea divisible por todos los números naturales desde 1 hasta 15.

   Solución:

   Observe que $abcabc = abc \cdot 1000 + abc = abc \cdot 1001 = abc \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, por lo que cualquier número de la forma $abcabc$ será divisible por 7, 11 y 13.

   Para que n sea divisible por $1, 2, \ldots, 15$ basta que abc sea divisible por 5, 8 y 9 porque:

- Si es divisible por 8, lo será también por 2 y 4, y como ya n es divisible por 7, entonces también será divisible por 14.
- Si es divisible por 9, lo será también por 3, y al ser n divisible por 2 y 4, entonces también será divisible por 6 y 12.
- Si es divisible por 5, al ser n divisible por 2 y 3, entonces también será divisible por 10 y 15.

   Para que abc sea divisible por 5, 8 y 9 debe ser múltiplo de ellos (pues son coprimos), es decir $abc = 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot k = 360k$; de donde $k = 1$ o $k = 2$ (pues $k > 2$ genera un número de más de tres dígitos), además en ambos casos se generan números cons dígitos distintos.

   Por lo tanto, todos los números que cumplen las condiciones pedidas son 360 360 y 720 720.

RAZONAMIENTO LÓGICO

5. Un prisionero lleva muchos años encerrado, por lo cual el carcelero decide darle una oportunidad de salir. El carcelero coloca en una mesa 11 llaves, numeradas del 1 al y 11, de las cuales 2 son necesarias para abrir la celda. Se sabe que las llaves que abren la celda tienen números de la misma paridad consecutivos. Para adivinar cuáles son las llaves, el prisionero puede escoger cualquier subconjunto de llaves y preguntar cuántas de ellas no le sirven. Tiene dos oportunidades de escoger y preguntar, pero las dos respuestas se le dan al final. Determine, si existe, una estrategia que le asegure poder salir libre.

   Solución:

   Sabemos que las llaves de la celda corresponden a alguna de las 9 parejas: $(1, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 7)$, $(7, 9)$, $(9, 11)$, $(2, 4)$, $(4, 6)$, $(6, 8)$, $(8, 10)$.

   Podemos hacer dos subgrupos y preguntar cuantas de ellas no le sirven, por tanto se sabe que en cada subgrupo le sirven $0, 1, 2$ llaves, entonces hay un total $3 \times 3 = 9$ posibilidades. La idea es escoger los subgrupos del tal manera que las 9 respuestas determinen las parejas.

   Consideremos los siguientes dos subgrupos $P = \{1, 2, 3, 5, 8, 10\}$ y $Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 11\}$

Pareja	¿Cuántos hay en P?	¿Cuántos hay en Q?
1 y 3	2	2
3 y 5	2	1
5 y 7	1	0
7 y 9	0	0
9 y 11	0	1
2 y 4	1	2
4 y 6	0	2
6 y 8	1	1
8 y 10	2	0

6. Considere una cantidad par, mayor o igual a 4, de puntos en una circunferencia, pintados de rojo y azul, alternando colores. Dos jugadores llamados Rojo y Azul se disponen a jugar de la siguiente manera: Rojo solo puede trazar cuerdas, tales que sus dos extremos sean puntos rojos, y Azul solo puede trazar cuerdas tales que sus dos extremos sean puntos azules. Además de esto, solo se pueden trazar cuerdas que no intersequen a ninguna otra cuerda que ya haya sido trazada. Pierde el jugador que ya no le sea posible trazar más cuerdas. Si empieza Rojo trazando una cuerda, luego Azul trazando una cuerda, y así sucesivamente, determine si Rojo o Azul tienen estrategia ganadora.

   Solución:

   Sea n la cantidad de puntos en la circunferencia. Se va a mostrar que si $n = 4k$ Rojo tiene estrategia ganadora, y si $n = 4k + 2$ entonces Azul tiene estrategia ganadora.

   Se pueden considerar los puntos n puntos que formen un polígono regular.

   Caso $n = 4k$

   Para esto imaginemos una recta l tal que hay $2k$ puntos a un lado de l y $2k$ al otro. Para esto Rojo en su primer movimiento traza la cuerda que une los dos puntos rojos más próximos a l y a partir de esto puede jugar en espejo con respecto a l, con lo que haga Azul. De esta forma Rojo tendría estrategia ganadora.

   Caso $n = 4k + 2$

   Considere las $2k + 1$ rectas que dividen al círculo en $2k + 1$ puntos a cada lado de las rectas. Si Rojo traza una cuerda, esta va a ser paralela a alguna de dichas rectas, digamos a l. Lo que tiene que hacer Azul es jugar con los puntos azules que son la reflexión de los puntos rojos que haya usado Rojo. De esta forma siempre que Rojo juegue, Azul podrá jugar, y así Azul posee estrategia ganadora.