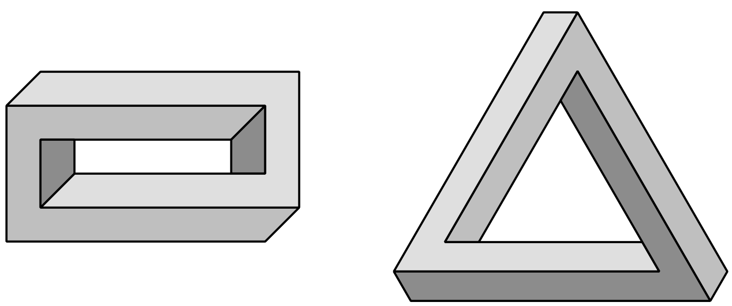
XXIX OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

MEP - UNA - UCR - MICITT - UNED - TEC

DÍA 2 – SOLUCIONES

BANCO DE PROBLEMAS



Nivel I

(7°)

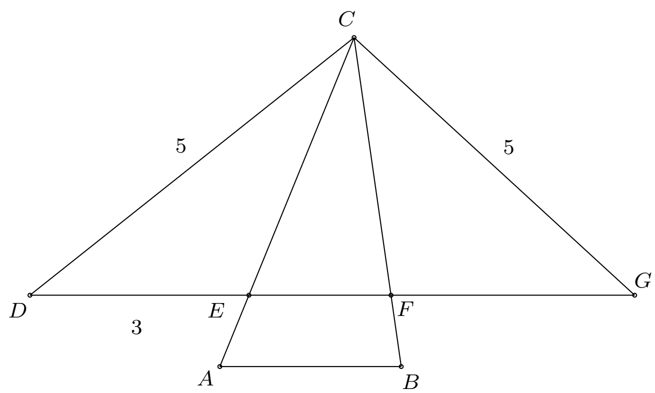
Martes 14 de noviembre – Final 2017

GEOMETRÍA

1. Considere el $\triangle ABC$ y sean E y F puntos, tales que $A-E-C$, $B-F-C$ y $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$. Sean D y G puntos, tales que $D-E-F-G$. Si $m\angle CAB = 2m\angle DCE$, $m\angle FCG + m\angle DCE = m\angle ABC$, $DE = 3$ y $CG = 5$, determine el perímetro del $\triangle DEC$.

   Solución:

   Considere la figura:



Sea $\alpha = m\angle DEC$, entonces $m\angle CAB = 2\alpha$.

Sea $\beta = m\angle ABC$, entonces $m\angle FCG + \alpha = \beta \Rightarrow m\angle FCG = \beta - \alpha$

$m\angle CEF = m\angle CAB = 2\alpha$ y $m\angle CFE = m\angle ABC = \beta$

Luego $m\angle DEC = 180° - 2\alpha$ y $m\angle CFG = 180° - \beta$

En $\triangle DEC$ $m\angle EDC + (180° - 2\alpha) + \alpha = 180° \Rightarrow m\angle EDC = \alpha$

$\therefore \triangle DEC$ es isósceles con $DE = EC = 3$

En $\triangle GFC$ $m\angle FGC + 180° - \alpha + \beta - \alpha = 180° \Rightarrow m\angle FGC = \alpha$

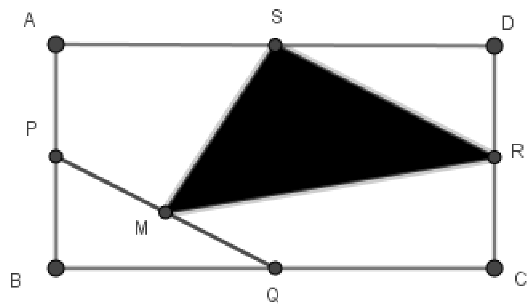
$\therefore \triangle DGC$ es isósceles con $DC = GC = 5$

$\therefore$ Perímetro de $\triangle DEC$ es 11.

2. Considere el rectángulo $ABCD$ y los puntos P, Q, R y S puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$, respectivamente. Sea M el punto medio de $\overline{PQ}$. Determine la razón entre las áreas del triángulo RSM y el rectángulo $ABCD$.

   Solución:

   Considere la siguiente figura como guía para la solución.



   El triángulo RSM tiene la mital del área del paralelogramo $PQRS$, esto dado que si tomamos como base el segmento RS la altura serìa la misma entre ellos, por lo tanto, se cumple que $(RSM) = \dfrac{(PQRS)}{2}$.

   Esto quiere decir que el área del triángulo RSM es un octavo del área del rectángulo $ABCD$.

   Por lo tanto, la razón entre sus áreas está dado por $\dfrac{(RSM)}{(ABCD)} = \dfrac{1}{8}$.

TEORÍA DE NÚMEROS

3. Encuentre todos los números de diez dígitos, en los que los dígitos del 0 al 9 se usan todos exáctamente una vez, tal que el primer dígito de izquierda a derecha es divisible entre uno, el número formado por el primer y segundo dígitos (de izquierda a derecha) es divisible entre 2, y así sucesivamente hasta que el número completo es divisible entre 10.

   Solución:

   Nótese que si tenemos los dígitos por posición, denotados como sigue,

$$d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4 \quad d_5 \quad d_6 \quad d_7 \quad d_8 \quad d_9 \quad d_0$$

   entonces necesariamente $d_0 = 0$, puesto que el número completo es divisible entre 10. Además, el número $d_1d_2d_3d_4d_5$ es divisible entre 5, por lo que $d_5 = 0$ o $d_5 = 5$. Pero al ser $d_0 = 0$, entonces $d_5 = 5$. LLenando parcialmente obtenemos:

$$d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4 \quad 5 \quad d_6 \quad d_7 \quad d_8 \quad d_9 \quad 0$$

   Nótese que d_1d_2, $d_1d_2d_3d_4$, $d_1d_2d_3d_45d_6$ y $d_1d_2d_3d_45d_6d_7d_8$ son todos pares, por lo que d_2, d_4, d_6 y d_8 son todos pares y, por lo tanto, en algún orden, son 2, 4, 6 y 8. Por lo tanto d_1, d_3, d_7 y d_9 son impares.

   Como $d_1d_2d_3d_4$ es divisible por 4, entonces, d_3d_4 es divisible por 4, y como d_3 es impar, esto fuerza a que d_4 sea 2 o 6. Esto nos da dos casos:

$$\begin{array}{cccccccccc} d_1 & d_2 & d_3 & 2 & 5 & d_6 & d_7 & d_8 & d_9 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 6 & 5 & d_6 & d_7 & d_8 & d_9 & 0 \end{array}$$

Como $d_1+d_2+d_3$ es múltiplo de 3, al igual que $d_1+d_2+d_3+d_4+d_5+d_6$, entonces $d_4+d_5+d_6$ es divisible por 3. Esto solo deja la posibilidad de $d_6 = 8$ en el primer caso, y $d_6 = 4$ en el segundo:

$$\begin{array}{cccccccccc} d_1 & d_2 & d_3 & 2 & 5 & 8 & d_7 & d_8 & d_9 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 6 & 5 & 4 & d_7 & d_8 & d_9 & 0 \end{array}$$

Dado que $d_1d_2d_3d_45d_6d_7d_8$ es divisible entre 8, se tiene que $d_6d_7d_8$ debe ser divisible entre 8, y d_7 impar, y distinto de 5, y d_8 par, y distinto de los pares usados, según el caso. En el primer caso las posibilidades serían, a primera vista, 816, 832, 873 y 896, pero 2 ya fue usado, entonces solo se podrían 816 y 896. Similarmente, en el segundo caso solo se puede usar 432 y 472:

$$\begin{array}{cccccccccc} d_1 & d_2 & d_3 & 2 & 5 & 8 & 1 & 6 & d_9 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 2 & 5 & 8 & 9 & 6 & d_9 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & d_9 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 6 & 5 & 4 & 7 & 2 & d_9 & 0 \end{array}$$

Aún mejor, en cada uno de estos casos, solo queda un dígito par, que debe ir en la posición: d_2.

$$\begin{array}{cccccccccc} d_1 & 4 & d_3 & 2 & 5 & 8 & 1 & 6 & d_9 & 0 \\ d_1 & 4 & d_3 & 2 & 5 & 8 & 9 & 6 & d_9 & 0 \\ d_1 & 8 & d_3 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & d_9 & 0 \\ d_1 & 8 & d_3 & 6 & 5 & 4 & 7 & 2 & d_9 & 0 \end{array}$$

Las posiciones restantes son impares: 3,7,9 en el primer caso; 1,3,7 en el segundo; 1,7,9 en el tercero, y 1,3,9 en el cuarto. Nótese que todas las posibles sumas en el primer caso (3+7+4,3+9+4,7+9+4), ninguna es divisible por 3 (recuerde que $d_1d_2d_3$ es divisible por 3), por lo que el caso completo se puede eliminar. Probando en los otros casos, por eliminación, (agregando el dígito restante en cada caso en la posición d_9) se obtienen las siguientes posibilidades:

1 472 589 630
7 412 589 630
1 896 543 270
9 816 543 270
7 896 543 210
9 876 543 210
1 836 547 290
3 816 547 290
1 896 547 230
9 816 547 230

No se ha probado la divisibilidad por 7 del número $d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7$. Esta propiedad solo la satisface 3 816 547 290.

4. Encuentre todos los enteros n para los que el número $n^2 + 45$ es un cuadrado perfecto.

   Solución:

   Observamos que si $n^2 + 45 = x^2$, entonces $45 = x^2 - n^2 = (x - n)(x + n)$.

   Como $45 = 1 \times 45 = 3 \times 15 = 5 \times 9$, y como $x - n < x + n$, se tiene que

$$\begin{array}{ccc} x + n = 45 & x + n = 15 & x + n = 9 \\ x - n = 1 & x - n = 3 & x - n = 5 \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ x = 23 & x = 9 & x = 7 \\ n = 22 & n = 6 & n = 2 \end{array}$$

   Por lo que todos los posibles casos en los que esto pasa son $n = 2$, $n = 6$ y $n = 22$.

RAZONAMIENTO LÓGICO

5. Un juego para dos personas consiste en mover una ficha desde la casilla superior izquierda hasta la casilla inferior derecha de una cuadrícula de tamaño $n \times n$ siguiendo las siguientes reglas:

   - Cada jugador mueve la ficha de manera alternada.
   - La ficha se mueve con las reglas del caballo del ajedrez, es decir, dos casillas en forma horizontal y una vertical, o dos en forma vertical y una horizontal.
   - En cada movimiento la ficha debe *avanzar* hacia la esquina inferior derecha, es decir, que no pueda quedar en una casilla que esté más a la izquierda o más arriba de donde estaba anteriormente.

   a) Determine todos los posibles valores de n para los cuales es posible completar el juego.

   b) Demuestre que existe una estrategia ganadora para el segundo jugador, para todos los casos en donde es posible llegar a la casilla inferior derecha.

   Solución:

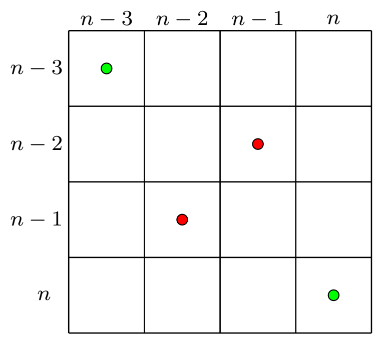
   a)
   Numeremos las filas y columnas empezando por la casilla superior izquierda y llamemos (a, b) a la casilla que está en la fila a y columna b. Llamemos *movimiento 1* al que consiste en mover la ficha dos casillas a la derecha y una hacia abajo y *movimiento 2* al que consiste en mover la ficha dos casillas hacia abajo y una a la derecha. Observemos que para llegar a una casilla (n, n) se deben realizar la misma cantidad de *movimientos 1* que de *movimientos 2*.

   Si la ficha se encuentra en la casilla (a, b) y se realizan k *movimientos 1* se llegará a la casilla $(a + 2k, b + k)$; si la ficha se encuentra en la casilla (a, b) y se realizan k *movimientos 2* se llegará a la casilla $(a + k, b + 2k)$. Entonces, si la ficha está en $(1, 1)$ y se ralizan k *movimientos 1* y k *movimientos 2* se llegará a la casilla $(1 + 3k, 1 + 3k)$. Entonces, los únicos valores de n para los cuales se puede llegar a la casilla (n, n) son los que tienen la forma $n = 1+3k$, con $k \in \mathbb{N}$

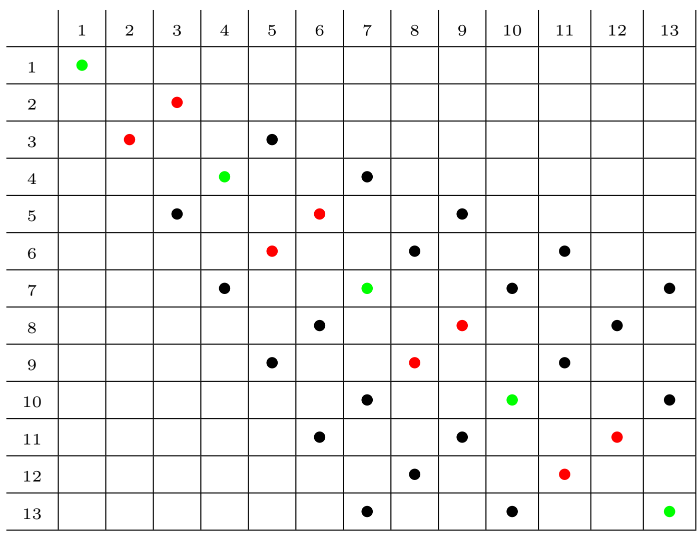
   b)
   Vemos que si la ficha llega a la casilla (n, n) ganará, por lo que diremos que esta casilla es

ganadora, entonces, aquellas casillas desde las que se pueda mover la ficha a una posición ganadora serán casillas *perdedoras*. Vemos que las casillas $(n-1, n-2)$ y $(n-2, n-1)$ son *perdedoras*.

Ahora, una casilla que obligue al siguiente jugador a moverse a una casilla perdedora también será una casilla ganadora. Vemos que la casilla $(n-3, n-3)$ es *ganadora*.



Vemos entonces que todas las casillas (a, a) son casillas *ganadoras*, por lo que el primer jugador siempre llevará la ficha a una casilla *perdedora*; luego el segundo jugador siempre ganará manteniendo la ficha a una casilla ganadora (a, a), es decir, las que están sbre la diagonal principal.



6. Se tienen 13 números impares menores que 50. Demuestre que al menos un par de ellos suma 50, o bien, uno de ellos es el 25.

   Solución:

   Se sabe que hay 25 números impares menores que 50.

   De ellos hay 12 parejas que suman 50, veamos:

   $(1, 49), (3, 47), (5, 45), (7, 43), (9, 41), (11, 39), (13, 37), (15, 35), (17, 33), (19, 31), (21, 29), (23, 27)$.

   El único número impar que no puede emparejarse para sumar 50 es el 25.

   Como se tiene 13 números impares menores que 50, por el principio del Palomar, de esos 13 números al menos dos deben sumar 50, la única manera de que esto no suceda es que 12 correspondan a diferentes parejas y el otro número sea el 25.

   Por lo tanto se prueba lo solicitado.