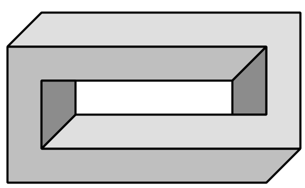
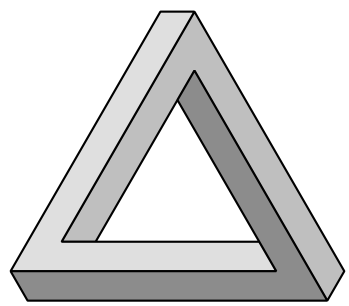
XXIX OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

MEP - UNA - UCR - MICITT - UNED - TEC

SOLUCIÓN
SEGUNDA ELIMINATORIA NACIONAL





I Nivel

(7°)

2017

Estimado estudiante:

La Comisión Organizadora de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas le saluda y felicita por haber clasificado a la segunda eliminatoria nacional de estas justas académicas. La prueba consta de dos partes: una primera parte de 12 preguntas de selección única, ponderadas con dos puntos cada respuesta correcta, y una segunda parte con tres preguntas de desarrollo, con un valor de siete puntos cada solución correcta.

Los resultados de esta eliminatoria se publicarán a partir del lunes 02 de octubre, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en las hojas de respuestas que se le han entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en las hojas de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 pts c/u**

1. Pablo lanza una moneda de 50 colones al aire tres veces y anota, para cada lanzamiento, si cae escudo o corona. La probabilidad de que Pablo obtenga exactamente una corona o exactamente un escudo es

   (a) $\frac{1}{4}$

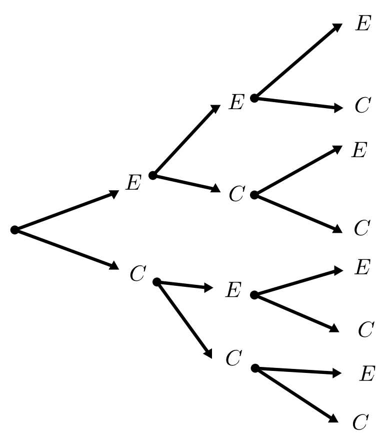
   (b) $\frac{1}{2}$

   (c) $\frac{3}{8}$

   (d) $\frac{3}{4}$

- Opción correcta: d
- Solución:

  Mediante el diagrama de árbol se representan todos los casos posibles, donde E representa escudo y C representa corona.



Como se puede observar en el diagrama de árbol, hay tres casos posibles de obtener exactamente una corona o tres casos posibles de obtener exactamente un escudo.

Por lo tanto, la probabilidad de que Pablo obtenga exactamente una corona o un escudo es $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

2. Sofía tiene cierta cantidad de caramelos; se come 30 % de ellos y le quedan 280 caramelos. Carol tiene la misma cantidad de caramelos que Sofía, pero se come 26 % de ellos. La cantidad de caramelos que Carol se come es

   (a) 30

   (b) 84

   (c) 104

   (d) 296

- Opción correcta: c

- Solución:

  Sofía tiene x caramelos, se come 30 %, le queda 70 %. Es decir, le quedan $\dfrac{70x}{100}$ caramelos, lo cual es 280 caramelos.
  De $\dfrac{70x}{100} = 280$ se tiene que $x = 400$.

  Sofía tiene entonces 400 caramelos, pero Carol se come 26 % de ellos; es decir, $\dfrac{400 \cdot 26}{100} = 104$ caramelos.

3. María dibujó un triángulo, tal que los lados miden números pares consecutivos y se sabe que el menor de ellos mide cuatro centímetros. Juan desea averiguar el área del triángulo equilátero que tiene el mismo perímetro que el triángulo que dibujó María. El área, en centímetros cuadrados, de este triángulo equilátero es

   (a) 24

   (b) 32

   (c) $6\sqrt{3}$

   (d) $9\sqrt{3}$

- Opción correcta: d

- Solución:

  Se sabe que el perímetro del triángulo que dibujó María es $4+6+8=18$.

  Para que Juan pueda dibujar un triángulo equilátero, cada lado debe medir la tercera parte de ese perímetro; es decir, cada lado debe medir $\frac{18}{3}=6$.

  Ahora, se calcula el área del triángulo equilátero cuyos lados miden 6 cm; para eso utilizamos la fórmula:

$$A=\frac{l^2\sqrt{3}}{4}=\frac{6^2\sqrt{3}}{4}=9\sqrt{3}$$

4. Al simplificar al máximo la expresión:

$$\sqrt[2017]{\frac{\left(k^{2017}\right)^{2017}}{k^{2017}}} - k$$

donde k es un número entero positivo, se obtiene

(a) 0

(b) 1

(c) $k\left(k^{2015}-1\right)$

(d) $k\left(k^{2016}-1\right)$

- Opción correcta: c
- Solución:

Al trabajar con leyes de potencias la expresión se tiene:

$$\sqrt[2017]{\frac{\left(k^{2017}\right)^{2017}}{k^{2017}}} - k = \frac{\left(k^{2017\cdot 2017}\right)^{\frac{1}{2017}}}{k} - k$$

$$= \frac{k^{2017}}{k} - k = k^{2016} - k = k\left(k^{2015}-1\right)$$

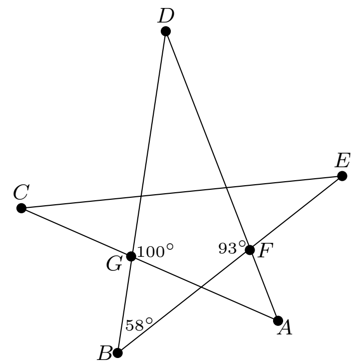
5. La figura adjunta muestra una estrella en forma de pentágono. La medida del $\angle CAD$ es

(a) $35°$

(b) $42°$

(c) $51°$

(d) $65°$



- Opción correcta: c
- Solución:

  Nótese que en el $\triangle BDF$, dado que $\angle B = 58°$ y $\angle F = 93°$, se tiene que $\angle D = 29°$.

  Ahora, tomando el triángulo $\triangle ADG$, se tiene adicionalmente que $\angle G = 100°$, por diferencia, $\angle A = 51°$.

6. Considere el número $n = 7a\,931\,41b$ de ocho dígitos que es divisible por 792. El valor del dígito a es

   (a) 2

   (b) 5

   (c) 6

   (d) 11

- Opción correcta: b

- Solución:

  Como a y b son dígitos, sus valores están entre 0 y 9.

  Se tiene que $7a93141b$ es divisible por 792, observe que $792 = 8 \cdot 9 \cdot 11$, entonces $7a93141b$ es divisible por 8, 9 y 11.

  Veamos primero que $7a93141b$ es divisible por 8, esto nos dice que las últimas tres cifras de dicho número es divible por 8. En este caso, se tiene que $41b$ es divisible por 8. Observe que entre 410 y 419 solamente existe un número que es divisible por 8, el número es 416. Por lo tanto el valor de $b = 6$.

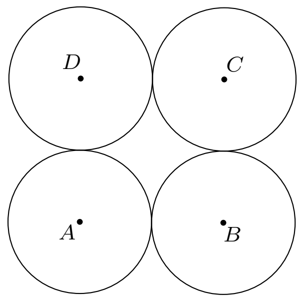
  Luego, $7a93141b$ es divisible por 9, esto nos dice que la suma de sus cifras es divisible por 9. Entonces, $7 + a + 9 + 3 + 1 + 4 + 1 + b = 25 + a + b$ es divisible por 9. Observe que $a + b$ puede ser 2 o 11, pues $0 \leq a + b \leq 18$.

  Como $b = 6$, cuando $a + b = 2 \Rightarrow a = -4$, se descarta, pues a está entre 0 y 9. Cuando $a + b = 11 \Rightarrow a = 5$.

  Por lo tanto, el valor de a es 5.

7. En la figura adjunta se muestran cuatro círculos tangentes de igual radio y de centros A, B, C y D, respectivamente (el único punto que comparten las circunferencias de centros D y C, por ejemplo, es el punto medio de $\overline{DC}$). Si la medida del radio de cada círculo es 6 cm, entonces el área en cm^2 del $\square ABCD$ es

   (a) 24
   (b) 36
   (c) 48
   (d) 144



- Opción correcta: d
- Solución:

  Cada círculo tiene radio 6 cm.

  Los círculos de centros A y B, respectivamente, forman el lado $\overline{AB}$ cuya medida es 12 cm.

  De igual manera, $AD = DC = CB = AB$.

  El $\square ABCD$ es un cuadrado ya que son tangentes las circunferencias. De esta forma, se tiene $12 \cdot 12$ como área del $\square ABCD$.

8. Una pulga quiere subir una escalera. Ella puede hacer solo dos tipos de brincos: tres escalones hacia arriba o cuatro escalones hacia abajo. Empezando a nivel del piso, la cantidad mínima de brincos que tendrá que dar la pulga para descansar en el escalón 22 es

   (a) 9

   (b) 10

   (c) 12

   (d) 15

- Opción correcta: c
- Solución:

  Si la pulga sube 30 escalones (10 brincos hacia arriba) y luego baja 8 escalones (2 brincos hacia abajo) se llega a descansar en el escalón 22.

  Ahora, note que hay que dar al menos 8 saltos, puesto que 7 o menos no llegaría a 22 ($3 \times 7 = 21$).

  Por lo que se puede simplificar el problema a resolver $3x - 4y = 1$, minimizando $x + y$, donde ambos son enteros positivos, y representa los saltos hacia abajo, y x los saltos hacia arriba, después del sétimo hacia arriba.

  Claramente $x > y$. Si hubiese una solución con $x + y < 5$, se tendría que los únicos casos con posibilidad de satisfacer las condiciones serían $x = 2, y = 1$ ($3x - 4y = 2$), o $x = 3, y = 1$ ($3x - 4y = 5$), donde ninguno satisface.

  Por lo tanto, el menor número de saltos sería 12.

9. Considere un cuadrado $\square ABCD$ y un triángulo equilátero $\triangle BEC$. Este triángulo se divide en cuatro triángulos equiláteros y uno de estos se divide de nuevo en cuatro triángulos equiláteros más. Si el área de uno de los triángulos equiláteros resultantes de la última división es $x^2\sqrt{3}$, entonces el perímetro del polígono de vértices A, B, E, C y D es

   (a) $8x$

   (b) $20x$

   (c) $24x$

   (d) $40x$

- Opción correcta: d
- Solución:

  Si y denota la medida del lado de uno de los triángulos equiláteros resultantes de la última división, cuya área mide $x^2\sqrt{3}$, entonces $x^2\sqrt{3} = \dfrac{y^2\sqrt{3}}{4}$ y $y = 2x$.

  Luego, la medida del lado de cada uno de los triángulos equiláteros resultantes de la última división es $2x$.

  La medida del lado de cada uno de los triángulos equiláteros resultantes de la primera división es $4x$.

  La medida del lado del triángulo equilátero $\triangle BEC$ es $8x$ y la medida del lado del cuadrado $\square ABCD$ es $8x$.

  Finalmente, el perímetro del polígono de vértices A, B, E, C y D es $5 \cdot 8x = 40x$.

10. Carlos tiene cuadrados verdes de tamaño 1×1, cuadrados amarillos de tamaño 2×2 y cuadrados rojos de tamaño 3×3. Él quiere crear un cuadrado usando estos cuadrados, en el cual aparezcan los tres colores. La mínima cantidad de cuadrados que debe utilizar es

    (a) 5

    (b) 6

    (c) 7

    (d) 8

- Opción correcta: d
- Solución:

  Si usa al menos un cuadrado rojo y uno amarillo se debe completar un cuadrado 5×5. Usando dos cuadrados amarillos más, y cuatro verdes se completa el cuadrado con 8 cuadrados.

  Falta ver que no es posible hacerlo con menos. Observe que la máxima área que se puede cubrir con 7 cuadrados es $5 \cdot 9 + 4 + 1 = 50$. Sean x, y, z las cantidades de cuadrados de cada tipo, entonces debe cumplirse que

$$\begin{aligned} 9x + 4y + z &= n^2 \\ x + y + z &\leq 7 \end{aligned}$$

  donde $n = 5, 6, 7$. Las únicas soluciones son $(x, y, z) = (3, 2, 1)$ y $(x, y, z) = (2, 1, 3)$, y verificando directamente se comprueba que ninguna de estas configuraciones es posible.

11. Una *suma circular* de dos números se define como sumar ambos números y restarle o sumarle seis las veces necesarias para que el resultado esté entre 1 y 6, inclusive.
Por ejemplo, la *suma circular* de 8 y 9 es $17-6-6=5$, y la *suma circular* de 4 y -7 es $-3+6=3$.
Carlos y Karla juegan a lo siguiente: Karla elige un número y luego Carlos lanza un dado, si el resultado del dado es mayor o igual que la suma circular de este y el número de Karla, entonces Carlos gana (en caso contrario gana Karla).
Si Karla puede elegir solo algún valor del conjunto $\{-2,-1,2,3\}$, entonces el número que debe elegir Karla para tener más posibilidad de ganar es

    (a) -2
    (b) -1
    (c) 2
    (d) 3

- Opción correcta: *c*
- Solución:

Si Karla elige el 2, entonces solo puede perder si el resultado del dado es 5 o 6, con lo que la suma circular sería 1 y 2 respectivamente (ya que $5>1$ y $6>2$); si el resultado del dado es otro, Karla gana.

En los otros casos se puede ver como Carlos gana en más de dos casos.

Para -2, Carlos gana con 3, 4, 5 o 6 como resultado del dado; para -1, Carlos gana con 2, 3, 4, 5 o 6 como resultado del dado; y para 3, Carlos gana con 4, 5 o 6 como resultado en el dado.

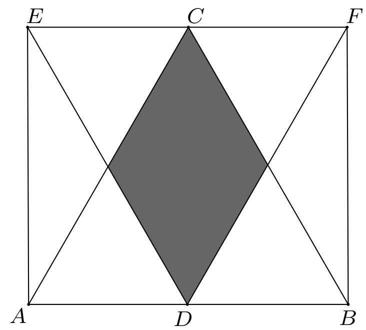
12. En la figura adjunta los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son equiláteros, $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$, C es el punto medio de $\overline{EF}$ y D es el punto medio de $\overline{AB}$. La razón entre el área de la región sombreada y el área del $\square AEFB$ es

   (a) $\dfrac{1}{5}$

   (b) $\dfrac{1}{4}$

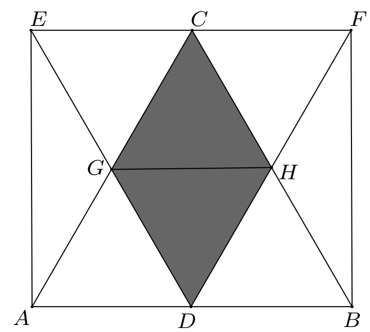
   (c) $\dfrac{1}{3}$

   (d) $\dfrac{2}{5}$



- Opción correcta: b

- Solución:



Sean G y H los puntos de intersección de $\overline{AC}$ con $\overline{ED}$ y $\overline{DF}$ con $\overline{BC}$ respectivamente.

Observe que al trazar $\overline{GH}$, el $\triangle ABC$ queda dividido en 4 triángulos de igual área, al igual que $\triangle DEF$. Es decir que las áreas de $\triangle EGC$ y $\triangle CFH$, juntas,son iguales que el área sombreada; al igual que las de los $\triangle ADG$ y $\triangle BDH$.

Por otra parte, $\square CDBF$ y $\square EADC$ son rectángulos cuyas diagonales se intersecan en en el punto medio. Con esto se tiene que $\triangle CDH$ y $\triangle BFH$ tienen igual área (pues tienen bases y alturas de igual medida) al igual que $\triangle AEG$ y $\triangle CDG$. Es decir que las áreas de $\triangle AEG$ y $\triangle BFH$, juntas, son iguales que el área sombreada.

$$\therefore \frac{\text{área sombreada}}{(AEFB)} = \frac{1}{4}$$

II Parte: Desarrollo **Valor 21 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. En cierto país se cumple lo siguiente:

   - Cada par de ciudades del país están enlazadas por exactamente un medio de transporte.
   - Los únicos medios de transporte en el país son bus, tren y avión.
   - Los tres medios de transporte son usados en el país.
   - Ninguna ciudad del país tiene los tres servicios de transporte.
   - No hay tres ciudades que estén enlazadas (dos a dos) por el mismo medio.

   Determine el máximo número de ciudades de dicho país.

   Solución:

   Sea n el número de ciudades del país.

   Los tres medios de transporte los denotaremos como A, B y T.

   Para que se usen los tres medios de transporte en el país, debe tenerse $n \geq 3$.

   Para $n = 3$, basta unir cada par de ciudades con un medio de transporte distinto.

   Para $n = 4$ sean C_1, C_2, C_3 y C_4 las cuatro ciudades. Unimos C_1 con C_2, C_2 con C_3, C_3 con C_4 y C_4 con C_1 mediante el medio de transporte A; unimos C_1 con C_3 mediante el medio de transporte B y, finalmente, unimos C_2 con C_4 mediante el medio de transpote T.

   Para $n \geq 6$ cada ciudad está unida por lo menos con otras cinco ciudades; como ninguna de las ciudades tiene los tres servicios de transporte, entonces toda ciudad al menos debe estar unida con tres ciudades mediante un mismo medio de transporte. De esta manera, por ejemplo y sin pérdida de generalidad, tenemos una ciudad C_0 unida a otras tres ciudades C_1, C_2 y C_3 mediante un mismo medio de transporte A; luego las ciudades C_1, C_2 y C_3 solo pueden estar unidas por los medios de transporte B y T, pero las tres ciudades no pueden estar unidas por el mismo medio de transporte, por lo que entre los tres enlaces existentes debe haber por lo menos uno del tipo B y otro del tipo T, con lo que se tendría una ciudad atendida por los tres medios de trasporte, contradiciendo otra de las condiciones del problema.

   Con lo anterior, no hay solución para este caso.

   Para $n = 5$ hay que hacer un análisis de casos, llegando a la conclusión de que tampoco hay solución.

   Finalmente, el máximo número de ciudades en dicho país es cuatro.

2. En un tablero de 8×4 casillas se han colocado nueve fichas de la siguiente manera: tres fichas en la primera fila de color verde cada una, tres fichas en la segunda fila de color amarillo cada una, y tres fichas en la tercera fila de color rojo cada una, tal y como se muestra en la figura adjunta.

   Cada ficha se puede mover únicamente si salta sobre otra ficha y si la casilla en la que cae está desocupada; puede saltar horizontalmente, verticalmente o en diagonal. Por ejemplo, es válido mover la ficha de la casilla $2B$ (amarilla) a cualquiera de las casillas $2D$, $4D$ o $4B$, o bien mover la ficha de la casilla $3B$ (roja) a cualquiera de las casillas $1D$ o $3D$.

   a) Determine la cantidad mínima de movimientos para mover todas la fichas verdes a la fila tres, todas las amarillas a la fila cuatro y todas la rojas la fila cinco pero que queden en las columnas A, B y C como están originalmente.

   b) ¿Cuántos movimientos se necesitan para mover todas la fichas a las últimas tres filas, sin importar el color, ni la columna?

	A	B	C	D
1	v	v	v	
2	a	a	a	
3	r	r	r	
4				
5				
6				
7				
8				

Solución:

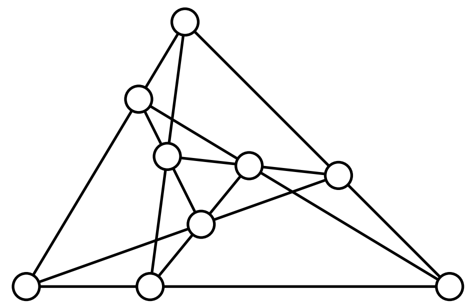
Para mover las fichas a la tercera, cuarta y quinta fila, se necesita un mínimo de 10 movimientos:

1) $2A$ ⓐ $\to 4A$
2) $3A$ ⓡ $\to 5A$
3) $2C$ ⓐ $\to 4C$
4) $3C$ ⓡ $\to 5C$
5) $1A$ ⓥ $\to 3C$
6) $1C$ ⓥ $\to 3A$
7) $3B$ ⓡ $\to 5D$
8) $1B$ ⓥ $\to 3B$
9) $2B$ ⓐ $\to 4B$
10) $5D$ ⓡ $\to 5B$

Por último, es imposible mover todas las filas a las últimas filas, ya que hay seis fichas (verdes y rojas) que se mueven solo en filas impares, mientras que las tres amarillas solo de mueven en filas pares y al final tenemos dos filas pares y una fila impar.

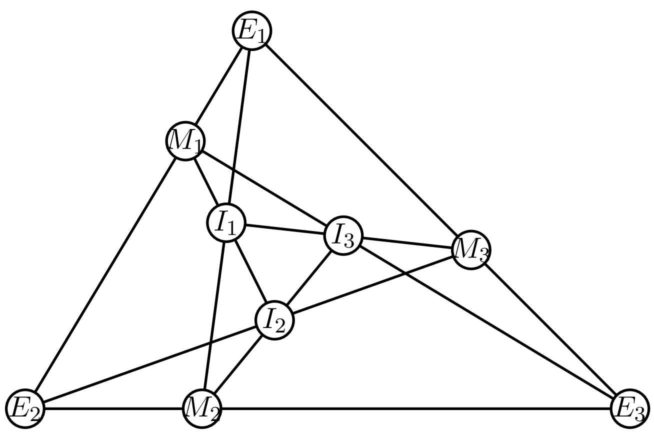
3. Un juego consiste en colocar fichas de dos colores diferentes en los círculos de la figura adjunta.

Dos jugadores tienen, cada uno, cuatro fichas del mismo color (el jugador A tiene cuatro fichas rojas y el jugador B tiene cuatro fichas azules).
Los jugadores colocan sus fichas alternadamente y gana el primero que logre colocar tres de sus fichas formando una línea recta.
Determine si alguno de los jugadores tiene una estrategia ganadora y, en caso de existir, explique cuál es esa estrategia.



Solución:

A los círculos que están en los vértices del triángulo grande denotémoslos E_1, E_2 y E_3, a los del triángulo interno I_1, I_2 e I_3, y los que están sobre los lados del triñgulo grande M_1, M_2 y M_3, tal como se muestra en la figura adjunta.



El primer jugador siempre gana colocando su primera ficha en alguna de las casillas M_1, M_2 o M_3.

Independientemente de la elección que efectúe el segundo jugador, el primero puede simpre lograr que la siguiente jugada del contrario sea obligada (defensiva) y seguidamente hacer una tercera que amenace tres en raya sobre dos líneas.

Con lo anterior, el jugador A se asegura la victoria al colocar su cuarta ficha.

Por ejemplo, si el primer jugador (jugador A) coloca su ficha en M_3, veamos las posibles jugadas.

Si el jugador B juega en una esquina:

B	A
E_1	I_1
I_3	I_2
M_1, E_2	Gana

B	A
E_2	I_3
I_1	E_3
M_1, E_1	Gana

B	A
E_3	I_3
I_1	I_2
M_2, E_2	Gana

Si el jugador B juega en una casilla interna:

B	A
I_1	E_1
E_3	E_2
M_1, I_2	Gana

B	A
I_2	E_1
E_3	I_1
M_2, I_3	Gana

B	A
I_3	E_3
E_1	E_2
M_2, I_2	Gana

Si el jugador B juega en una casilla media:

B	A
M_1	E_3
E_1	E_2
M_2, I_2	Gana

B	A
M_2	E_1
E_3	E_2
M_1, I_2	Gana