**XXII$^{a}$OLIMPÍADA de MAYO**
**Segundo Nivel**
**Mayo de 2016**

Duración de la prueba: 3 horas.
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
<u>Justifica cada una de tus respuestas.</u>
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 27 de mayo.

## PROBLEMA 1

Decimos que un número de cuatro cifras $\overline{abcd}$, que comienza en $a$ y termina en $d$, es *intercambiable* si existe un entero $n > 1$ tal que $n \times \overline{abcd}$ es un número de cuatro cifras que comienza en $d$ y termina en $a$. Por ejemplo, 1009 es intercambiable ya que $1009 \times 9 = 9081$. Hallar el mayor número intercambiable.

## PROBLEMA 2

¿Cuántas casillas se deben pintar como mínimo en un tablero de $5 \times 5$ de tal modo que en cada fila, en cada columna y en cada cuadrado de $2 \times 2$ haya al menos una casilla pintada?

## PROBLEMA 3

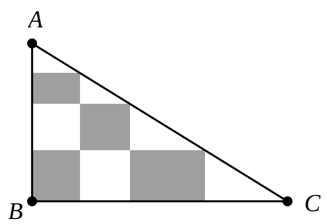
Decimos que un número entero positivo es *cua-divi* si es divisible por la suma de los cuadrados de sus dígitos, y además ninguno de sus dígitos es igual a cero.
a) Encontrar un número cua-divi tal que la suma de sus dígitos sea 24.
b) Encontrar un número cua-divi tal que la suma de sus dígitos sea 1001.

## PROBLEMA 4

En un triángulo $ABC$, sean $D$ y $E$ puntos de los lados $BC$ y $AC$, respectivamente. Los segmentos $AD$ y $BE$ se cortan en $O$. Supongamos que la base media del triángulo, paralela a $AB$, divide al segmento $DE$ por la mitad. Demostrar que el triángulo $ABO$ y el cuadrilátero $ODCE$ tienen áreas iguales.

## PROBLEMA 5

Rosa y Sara juegan con un triángulo $ABC$, recto en $B$. Rosa comienza marcando dos puntos interiores de la hipotenusa $AC$, luego Sara marca un punto interior de la hipotenusa $AC$ distinto de los de Rosa. Luego, desde estos tres puntos se trazan las perpendiculares a los lados $AB$ y $BC$, formándose la siguiente figura.




Sara gana si el área de la superficie sombreada es igual al área de la superficie no sombreada; en otro caso gana Rosa. Determinar quién de las dos tiene estrategia ganadora.