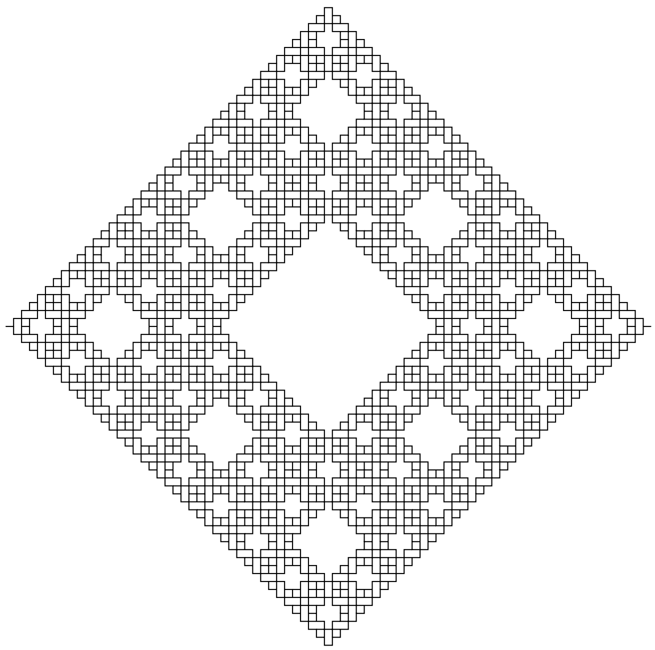
# XXX OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

*MEP - UNA - UCR - MICITT - UNED - TEC*

OLIMPIADAS COSTARRICENSES DE MATEMÁTICAS

OLCOMA

## PRIMERA ELIMINATORIA



Nivel III

$(10° - 11° - 12°)$

2018

Ministerio de Educación Pública

UNA UNIVERSIDAD NACIONAL COSTA RICA

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA LUCEM ASPICIO

micitt MINISTERIO DE CIENCIA, TECNOLOGÍA Y TELECOMUNICACIONES

UNED

TEC Tecnológico de Costa Rica

Estimado estudiante:

La comisión de OLCOMA le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria de la XXX Olimpiada Costarricense de Matemáticas, deseándole los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 25 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a la segunda eliminatoria a partir del viernes 6 de julio, en la siguiente dirección electrónica:

**www.olcoma.com**

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\overline{AB}$ | segmento de extremos $A$ y$B$ | $\angle ABC \approx \angle DEF$ | congruencia de ángulos |
| $AB$ | medida del $\overline{AB}$ | $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ | congruencia de triángulos |
| $\overrightarrow{AB}$ | rayo de extremo $A$ y que contiene a $B$ | $ABC \leftrightarrow DEF$ | correspondencia respectiva entre puntos |
| $\overleftrightarrow{AB}$ | recta que contiene los puntos $A$ y $B$ | $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ | semejanza de triángulos |
| $\angle ABC$ | ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ | $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ | congruencia de segmentos |
| $m\angle ABC$ | medida del $\angle ABC$ | $\widehat{AB}$ | arco de extremos $A$ y $B$ |
| $\triangle ABC$ | triángulo de vértices $A$, $B$, $C$ | $m\widehat{AB}$ | medida del $\widehat{AB}$ |
| $\square ABCD$ | cuadrilátero de vértices $A$, $B$, $C$, $D$ | $(ABC)$ | área de $\triangle ABC$ |
| $\parallel$ | paralelismo | $(ABCD)$ | área de $\square ABCD$ |
| $\perp$ | perpendicularidad | $P-Q-R$ | $P$, $Q$, $R$ puntos colineales, con $Q$ entre los puntos $P$ y $R$ |

1. En la cima de la Torre Karim hay una habitación especial en la que el tiempo transcurre de tal forma que si una persona está en su interior durante un año, en el exterior habrá pasado solamente un día. Olcoman tenía mucho sueño, pero no quería perder tiempo para estudiar para el examen de Olimpiadas, entonces entró en la habitación y durmió ocho horas. El tiempo aproximado que transcurrió afuera es

   (a) 0,5 horas
   (b) 0,5 minutos
   (c) 1,3 minutos
   (d) 1,3 segundos

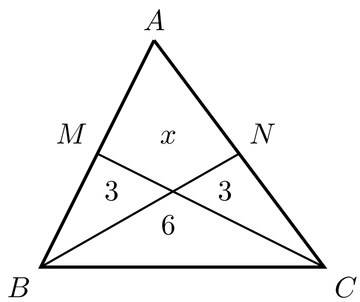
2. Si se suman los dígitos de un número entero positivo $n$ de siete dígitos el resultado es seis. El producto de los dígitos de $n$ es

   (a) 0
   (b) 5
   (c) 6
   (d) 12

3. La cantidad de números de cuatro cifras que son cuadrados perfectos y múltiplos de cinco o seis es

   (a) 20
   (b) 22
   (c) 24
   (d) 26

4. En la figura adjunta, $M$ y $N$ son los puntos medios de los lados correspondientes del triángulo que se muestra. Si 3, 3 y 6 corresponden, respectivamente, al área de cada triángulo, el área del cuadrilátero donde se encuentra $x$ es




(a) 4

(b) 5

(c) 6

(d) 7

5. En un triángulo rectángulo la medida de un cateto es dos tercios de la medida del otro cateto. El seno del ángulo agudo de mayor medida es

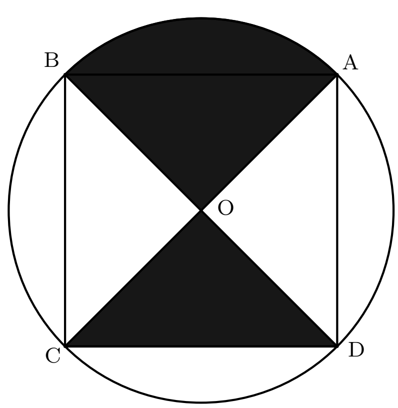
(a) $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$

(b) $\dfrac{3\sqrt{3}}{13}$

(c) $\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

(d) $\dfrac{13\sqrt{3}}{3}$

6. En la figura adjunta, las diagonales del cuadrado $\square ABCD$ se intersecan en el punto $O$. Si el área del círculo de radio $\overline{OD}$ es $18\pi$ cm$^2$, entonces el área de la región sombreada, en cm$^2$, es




(a) $9+\dfrac{9\pi}{2}$

(b) $\dfrac{9}{2}+9\pi$

(c) $\dfrac{9}{4}+\dfrac{9\pi}{2}$

(d) $\dfrac{9}{2}+9\pi$

7. Si en una tanda de penales 32 % fueron atajados por el portero, 30 % fueron lanzados fuera de la portería o impactados en el marco (sin ser anotación), y el resto fueron anotados, la mínima cantidad de penales que pudieron haber sido lanzados es

   (a) 25

   (b) 50

   (c) 62

   (d) 100

8. Considere la ecuación cuadrática $x^2 + 2x - n = 0$, con $1 < n < 100$. La cantidad de enteros $n$ en la cual la ecuación dada posee dos soluciones racionales distintas es

   (a) 0

   (b) 7

   (c) 8

   (d) 9

9. La cantidad de maneras en la que un cartero puede entregar siete cartas a siete personas distintas, de manera que exactamente tres de ellas hayan recibido una carta incorrecta es

   (a) 84
   (b) 70
   (c) 49
   (d) 35

10. Si se sabe que $a$ y $b$ son constantes reales, el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x - y = b \\ ax + y = 0 \end{cases}$ posee una única solución si

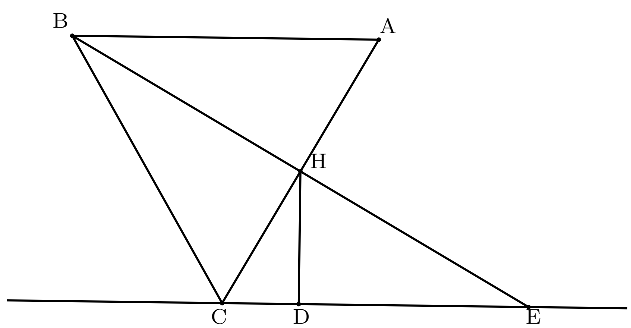
    (a) $a \neq 1$ y $b \in \mathbb{R}$

    (b) $a \neq 1$ y $b = 0$

    (c) $a \neq -1$ y $b \in \mathbb{R}$

    (d) $a = -1$ y $b \neq 0$

11. En la figura adjunta, el $\triangle ABC$ es equilátero, $D$ está en $\overleftrightarrow{CE}$ que es paralela al $\overline{AB}$, y $\overline{BE}$ divide al $\angle CBA$ en dos ángulos de igual medida. Si $H$ es el punto donde se cortan $\overline{AC}$ y $\overline{BE}$, $HD = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ es la medida de una altura del $\triangle CHE$ y $DC = \frac{3}{2}$, entonces el área del $\triangle ABC$ es




    (a) $3\sqrt{3}$

    (b) $5\sqrt{3}$

    (c) $6\sqrt{3}$

    (d) $9\sqrt{3}$

12. Juan tiene un tablero de $4 \times 4$ y desea marcar ocho de las 16 casillas, de tal manera que cada fila y cada columna contengan exactamente dos casillas marcadas. La cantidad de maneras en que Juan puede hacerlo es

    (a) 128

    (b) 90

    (c) 45

    (d) 32

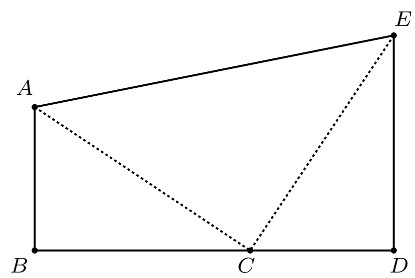
13. En la figura adjunta el $\square ABDE$ es un trapecio rectángulo con ángulos rectos en $B$ y $D$. Si $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{DE}{BC} = \dfrac{4}{3}$, $\angle CED \cong \angle BCA$ y $BD = 6$, $AE$ es

(a) $\dfrac{20}{3}$

(b) $\dfrac{25}{4}$

(c) $\dfrac{27}{4}$

(d) $\dfrac{31}{5}$




14. La cantidad de números positivos con todos sus dígitos pares distintos que pueden formarse, de tal manera que sean divisibles por 3, 5 y 7 es

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3

15. Sean $a$ y $b$ dos números reales positivos. Si $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = 4$, entonces el valor de $\dfrac{a+b}{a-b}$ es

(a) 2

(b) 4

(c) $\sqrt{2}$

(d) $\sqrt{3}$

16. Un docente de Matemáticas que vive en San José debe trasladarse hacia Golfito a impartir un curso de lógica mientras que otro profesor de Golfito viaja a San José a recibir una capacitación el mismo día. Parten a la misma hora hacia el lugar de destino y viajan a una velocidad constante. Si ambos se cruzan en el camino exactamente a la 1 pm, el primero llega a su destino a las 3 pm mientras que el segundo llega a las 9 pm, la hora a la que salieron es

    (a) 6 am

    (b) 7 am

    (c) 8 am

    (d) 9 am

17. Si $a$ y $b$ son números reales positivos que cumplen $x^3y^4 = a$ y $x^5y^6 = b$, entonces $x$ es

    (a) $\frac{b^2}{a^3}$

    (b) $\frac{b}{a}$

    (c) $\sqrt{\frac{a^5}{b^3}}$

    (d) $\sqrt{\frac{b}{a}}$

18. A Alberto, con un motor viejo, le toma seis horas llenar una piscina de agua. A Bryan, con un motor más grande, le toma cuatro horas llenar la misma piscina. A Carlos, con un motor más moderno, le toma el mismo tiempo que le tomaría a Alberto y a Bryan si lo hacen juntos. Siempre que se llena la piscina se hace a un ritmo constante. La fracción de la piscina que podrían llenar los tres trabajando juntos en una hora es

    (a) $\frac{16}{24}$

    (b) $\frac{18}{24}$

    (c) $\frac{20}{24}$

    (d) $\frac{21}{24}$

19. Si $n$ y $m$ son números naturales, tales que $\dfrac{1280}{m\,(n+1)} = n^n$, entonces el valor de $m$ es

    (a) 1

    (b) 2

    (c) 4

    (d) 5

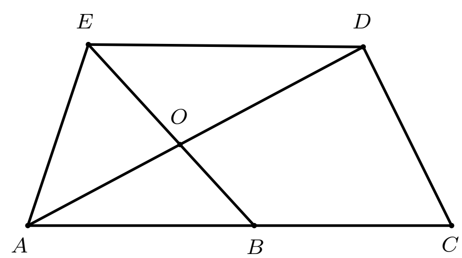
20. En la figura adjunta el $\square ACDE$ es un trapecio tal que $ED = 15$, $AC = 24$ y la altura del trapecio es 12. Si $B$ es el punto medio $\overline{AC}$, el área del $\square OBCD$ es

    (a) 78

    (b) 112

    (c) 122

    (d) 234




21. Se enumeran en una lista los números del 1 al 488. La diferencia entre la cantidad de veces que aparece el número 4 y la cantidad de veces que aparece el número 9 corresponde a

    (a) 89

    (b) 90

    (c) 99

    (d) 100

22. Alicia escribe una ecuación en la pizarra, diciendo que tiene soluciones en los números enteros positivos:

$$m\left(m^k - m \cdot k + m^2 + 1\right) = 2018$$

Con certeza se cumple que

(a) $k = 2$
(b) $k = 10$
(c) $m = 3$
(d) $m = 10$

23. Considere el $\triangle ABC$, con $D$ en $\overline{BC}$, y sea $\overline{AD}$ bisectriz del $\angle BAC$. La perpendicular a $\overline{BC}$ por $D$ corta a $\overline{AC}$ en $E$. Si $AE = ED = \dfrac{EC}{3}$ y $AD = \sqrt{3}$, entonces el área del $\triangle ABC$ es

(a) $2\sqrt{2}$
(b) $2\sqrt{3}$
(c) $3\sqrt{2}$
(d) $3\sqrt{3}$

24. La suma de los dígitos del número entero positivo $n$ que cumple que $n+1$ y $\dfrac{n}{8}+34$ son cubos perfectos es

(a) 17
(b) 18
(c) 19
(d) 20

25. Considere la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(n) = \left\lfloor \frac{4039n}{2018} \right\rfloor$$

donde $\lfloor x \rfloor$ representa la parte entera de $x$; por ejemplo, $\lfloor 0{,}5 \rfloor = 0$, $\lfloor 1{,}4 \rfloor = 1$, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$ y $\lfloor \pi \rfloor = 3$. El resultado de $f(1) + f(2) + \cdots + f(675)$ es

(a) 456 300

(b) 456 301

(c) 456 302

(d) 456 303