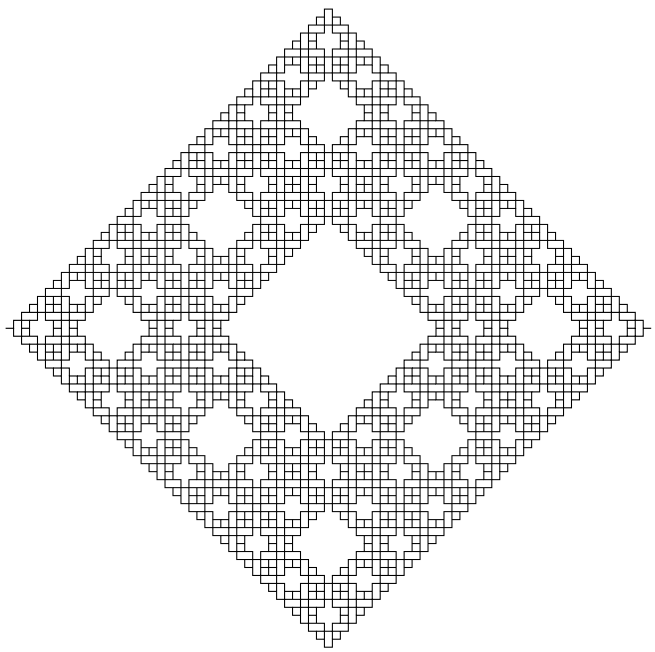
XXX OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UNA - UCR - MICITT - UNED - TEC

SOLUCIÓN
PRIMERA ELIMINATORIA NACIONAL



Nivel III

$(10^{\circ} - 11^{\circ} - 12^{\circ})$

2018

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2018 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, deseándole los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 25 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del viernes 6 de julio, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \approx \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

1. En la cima de la Torre Karim hay una habitación especial en la que el tiempo transcurre de tal forma que si una persona está en su interior durante un año, en el exterior habrá pasado solamente un día. Olcoman tenía mucho sueño, pero no quería perder tiempo para estudiar para el examen de Olimpiadas, entonces entró en la habitación y durmió ocho horas. El tiempo aproximado que transcurrió afuera es

   (a) 0,5 horas
   (b) 0,5 minutos
   (c) 1,3 minutos
   (d) 1,3 segundos

- Opción correcta: (c)
- Solución:
  $$\frac{1 \text{ día}}{1 \text{ año}} = \frac{24 \text{ horas}}{365 \text{ días}} = \frac{1440 \text{ minutos}}{8760 \text{ horas}} = \frac{x \text{ minutos}}{8 \text{ horas}} \Rightarrow x = \frac{(1440 \text{ minutos})(8 \text{ horas})}{8760 \text{ horas}} = \frac{96}{73} \text{ minutos}$$

  $96 \div 73 \approx 1{,}3$ minutos

2. Si se suman los dígitos de un número entero positivo n de siete dígitos el resultado es seis. El producto de los dígitos de n es

   (a) 0
   (b) 5
   (c) 6
   (d) 12

- Opción correcta: (a)
- Solución:
  Si d_i es el i-ésimo dígito, entonces es un entero no negativo menor o igual a 9. Dado que
  $$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + d_7 = 6,$$
  entonces al menos uno de esos dígitos es 0, y por lo tanto el producto sería 0.

3. La cantidad de números de cuatro cifras que son cuadrados perfectos y múltiplos de cinco o seis es

   (a) 20

   (b) 22

   (c) 24

   (d) 26

- Opción correcta: (b)
- Solución:

  Los cuadrados perfectos de cuatro cifras corresponden a los cuadrados desde 32^2 hasta 99^2, puesto que $31^2 = 961$ y $100^2 = 10000$. Para que sean múltimplos de 6, sus bases deben serlo y se tiene un total de 11 múltiplos de 6 desde 36 hasta 96. Por su parte se tiene 13 múltiplos de 5 desde 35 hasta 95. Esto daría un total de 24 números, pero se deben restar los que son múltipos de ambos, que son únicamente 2 (múltiplos de 30). Por lo tanto hay 22 números que cumplen lo pedido.

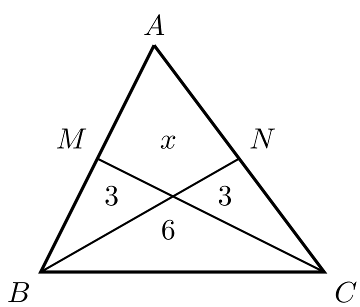
4. En la figura adjunta, M y N son los puntos medios de los lados correspondientes del triángulo que se muestra. Si 3, 3 y 6 corresponden, respectivamente, al área de cada triángulo, el área del cuadrilátero donde se encuentra x es

   (a) 4

   (b) 5

   (c) 6

   (d) 7



- Opción correcta: (c)
- Solución:

  Nótese que $AN = NC$, y como los triángulos $\triangle ANB$ y $\triangle NCB$ tienen la misma altura, y la misma base, por lo que tienen la misma área, por lo que $x + 3 = 6 + 3$, es decir, $x = 6$.

5. En un triángulo rectángulo la medida de un cateto es dos tercios de la medida del otro cateto. El seno del ángulo agudo de mayor medida es

   (a) $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$

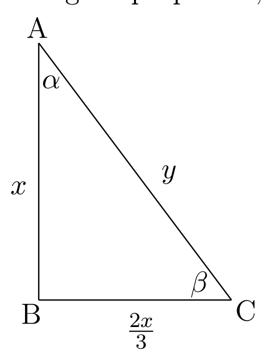
   (b) $\dfrac{3\sqrt{3}}{13}$

   (c) $\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

   (d) $\dfrac{13\sqrt{3}}{3}$

- Opción correcta: (c)
- Solución:

  Observe la figura propuesta,



Como $x > \dfrac{2x}{3}$ entonces se tiene que $\alpha < \beta$, por lo que para poder calcular el seno se debe obtener el valor de y en términos de x, así:

$$y^2 = \left(\frac{2x}{3}\right)^2 + x^2 \Rightarrow y^2 = \frac{4x^2}{9} + x^2 \Rightarrow y^2 = \frac{13x^2}{9} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{13x^2}{9}} \Rightarrow y = \pm\frac{x}{3}\sqrt{13}$$

* Se elimina el valor negativo por ser una figura geométrica.*
Por lo tanto, al aplicar la fórmula del seno, se obtiene:

$\sin\beta = \dfrac{x}{\frac{x}{3}\sqrt{13}} = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

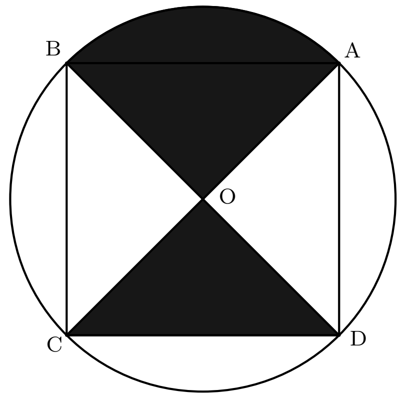
6. En la figura adjunta, las diagonales del cuadrado $\square ABCD$ se intersecan en el punto O. Si el área del círculo de radio $\overline{OD}$ es 18π cm^2, entonces el área de la región sombreada, en cm^2, es

   (a) $9 + \dfrac{9\pi}{2}$

   (b) $\dfrac{9}{2} + 9\pi$

   (c) $\dfrac{9}{4} + \dfrac{9\pi}{2}$

   (d) $\dfrac{9}{2} + 9\pi$



- Opción correcta: (a)
- Solución:

  El área de la región sombreada es la cuarta parte del área del círculo sumada con la cuarta parte del área del cudrado.

  Sea $r = \overline{OD}$ es el radio del círculo, como el área del círculo es 18π se tiene que $\pi r^2 = 18\pi \Rightarrow r = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. De esta manera, $BD = 2r = 6\sqrt{2}$, por lo que $CD = 6$ y el área del cuadrado es 36.

  El área de la región sombreada es $\dfrac{18\pi}{4} + \dfrac{36}{4} = \dfrac{9\pi}{2} + 9$.

7. Si en una tanda de penales 32 % fueron atajados por el portero, 30 % fueron lanzados fuera de la portería o impactados en el marco (sin ser anotación), y el resto fueron anotados, la mínima cantidad de penales que pudieron haber sido lanzados es

   (a) 25

   (b) 50

   (c) 62

   (d) 100

- Opción correcta: (b)
- Solución:

  Los penales que fueron anotados son 38 %.

  Si x es la cantidad de penales lanzados, entonces $\dfrac{32}{100}x = \dfrac{8}{25}x$, $\dfrac{30}{100}x = \dfrac{3}{10}x$ y $\dfrac{38}{100}x = \dfrac{19}{50}x$ deben ser enteros, de donde el mínimo valor de x es 50.

8. Considere la ecuación cuadrática $x^2 + 2x - n = 0$, con $1 < n < 100$. La cantidad de enteros n en la cual la ecuación dada posee dos soluciones racionales distintas es

   (a) 0

   (b) 7

   (c) 8

   (d) 9

- Opción correcta: (d)
- Solución:

  $\triangle = (2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -n = 4n + 4$, luego las soluciones de la ecuación están dadas por:

  $$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4n+4}}{2} = -1 \pm \sqrt{n+1}$$

  Como las soluciones son racionales entonces $\sqrt{n+1}$ debe ser una raíz exacta, es decir $n+1$ debe ser un número cuadrado perfecto. Así, $n = \{3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99\}$

9. La cantidad de maneras en la que un cartero puede entregar siete cartas a siete personas distintas, de manera que exactamente tres de ellas hayan recibido una carta incorrecta es

   (a) 84

   (b) 70

   (c) 49

   (d) 35

- Opción correcta: (b)
- Solución:

  Primero la cantidad de formas de escoger a las 4 personas a las que le llego bien la carta es de 7 escoger 4, es decir $\binom{7}{4} = \dfrac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$.

  A las restantes 3 hay 2 formas de entregarles las cartas de manera que ninguna haya recibido la carta correcta. Por tanto hay en total 70 posibles formas.

10. Si se sabe que a y b son constantes reales, el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x - y = b \\ ax + y = 0 \end{cases}$ posee una única solución si

    (a) $a \neq 1$ y $b \in \mathbb{R}$

    (b) $a \neq 1$ y $b = 0$

    (c) $a \neq -1$ y $b \in \mathbb{R}$

    (d) $a = -1$ y $b \neq 0$

- Opción correcta: (c)
- Solución:

  Al sumar miembro a miembro las dos ecuaciones, se tiene $(1+a)\,x = b \Rightarrow x = \dfrac{b}{1+a}$ siempre que $a \neq -1$ independientemente del valor de b. En ese caso, habrá solución única $x = \dfrac{b}{1+a}$, $y = \dfrac{-ab}{1+a}$.

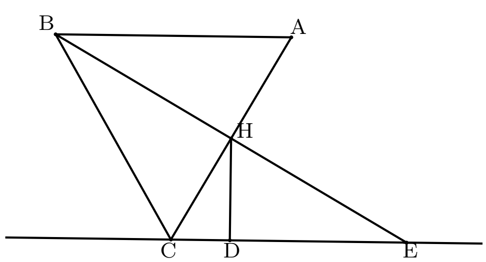
11. En la figura adjunta, el $\triangle ABC$ es equilátero, D está en $\overleftrightarrow{CE}$ que es paralela al $\overline{AB}$, y $\overline{BE}$ divide al $\angle CBA$ en dos ángulos de igual medida. Si H es el punto donde se cortan $\overline{AC}$ y $\overline{BE}$, $HD = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ es la medida de una altura del $\triangle CHE$ y $DC = \dfrac{3}{2}$, entonces el área del $\triangle ABC$ es

    (a) $3\sqrt{3}$

    (b) $5\sqrt{3}$

    (c) $6\sqrt{3}$

    (d) $9\sqrt{3}$



- Opción correcta: (d)
- Solución:

  En el $\triangle CDH$ y usando el teorema de Pitágoras se tiene que $CH^2 = CD^2 + DH^2 \Rightarrow CH = \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 3.$

  Como $\triangle ABC$ es equilátero y $\overline{BE}$ biseca al $\angle CBA$, $\overline{BH}$ es altura de dicho triángulo y mediatriz. Luego $AH = CH = 3$, por lo que cada uno de los lados del $\triangle ABC$ mide 6.

El área de este triángulo es $\dfrac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$.

12. Juan tiene un tablero de 4×4 y desea marcar ocho de las 16 casillas, de tal manera que cada fila y cada columna contengan exactamente dos casillas marcadas. La cantidad de maneras en que Juan puede hacerlo es

    (a) 128

    (b) 90

    (c) 45

    (d) 32

- Opción correcta: (b)
- Solución:

  Numeremos las filas y las columnas de 1 a 4 y sea C_{ij} la casilla que se encuentra en la fila i y en la columna j. Para seleccionar las dos casillas de la primera fila debe escoger 2 de 4, es decir $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ maneras. Supongamos que se escogen C_{11} y C_{12} (los otros casos son similares). Si en la fila 2 se marcan C_{21} y C_{22}, obligatoriamente se debe completar el marcado con C_{33}, C_{34}, C_{43} y C_{42}. Si en cambio en la fila 2 se marcan C_{23} y C_{24}, en la fila 3 se puede marcar cualquier par de casillas (hay 6 posibilidades) y quedan determinadas las dos casillas de la fila 4. Si en la fila 2 se escogen C_{21} y C_{23}, hay que marcar necesariamente C_{34} y C_{44} en la cuarta columna, y se puede completar de dos maneras: con C_{32} y C_{43} o con C_{33} y C_{42}. El mismo razonamiento se aplica si en la fila 2 se escogen las casillas C_{21} y C_{24}, C_{22} y C_{23} ó C_{22} y C_{24}. En definitiva resultan $6(1 + 6 + 2 \cdot 4) = 6 \cdot 15 = 90$ maneras.

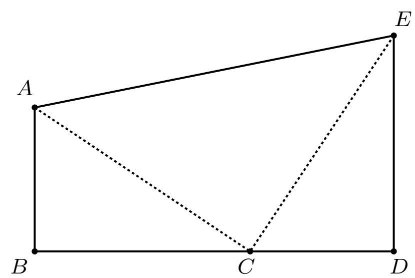
13. En la figura adjunta $\square ABDE$ es un trapecio rectángulo con ángulos rectos en B y D. Si $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{DE}{BC} = \dfrac{4}{3}$, $\angle CED \cong \angle BCA$ y $BD = 6$, AE es

    (a) $\dfrac{20}{3}$

    (b) $\dfrac{25}{4}$

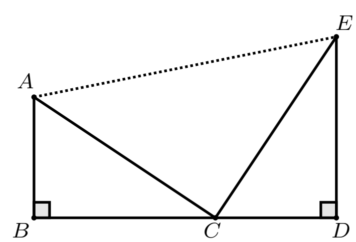
    (c) $\dfrac{27}{4}$

    (d) $\dfrac{31}{5}$



- Opción correcta: (b)
- Solución:

Como $m\angle CED + m\angle DCE = 90$ entonces $m\angle BCA + m\angle DCE = 90$ y así $m\angle ACE = 90$.
Por otro lado como $m\angle BCA + m\angle CAB = 90$ y $m\angle BCA + m\angle DCE = 90$ entonces $m\angle CAB = m\angle DCE$ y de esta forma $\triangle ABC \sim \triangle CDE$ (A-A).
De la semenjaza anterior y de los datos en el enunciado tenemos $\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{CD} = \frac{4}{3} = \frac{DE}{BC}$ y así $BC = CD = 3$.
De la igualdad anterior y utilizando una de las hipótesis suministradas tenemos que $\frac{BC}{AB} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \frac{9}{4} = AB$ entonces $AC^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^2 + 3^2$ y de ahí $AC = \frac{15}{4}$.



Ahora como$\frac{DE}{CD} = \frac{4}{3}$ entonces $DE = 4$ y así $CE = 5$

Finalmente aplicando Pitágoras en el $\triangle ACE$ tenemos que $AE^2 = \left(\frac{15}{4}\right) + 5^2$ y de ahí $AE = \dfrac{25}{4}$.

14. La cantidad de números positivos con todos sus dígitos pares distintos que pueden formarse, de tal manera que sean divisibles por 3, 5 y 7 es

    (a) 0

    (b) 1

    (c) 2

    (d) 3

- Opción correcta: (d)
- Solución:

Los dígitos del número deben ser tomados del conjunto $\{0, 2, 4, 6, 8\}$. Para que el número sea divisible por 5, debe terminar en 0. Para que sea divisible por 3, sus dígitos deben sumar un número múltiplo de 3. Si se toman dos dígitos el único posible es 60 pero no es múltiplo de 7. Con tres dígitos se tiene $0 + 2 + 4 = 6$ y $0 + 4 + 8 = 12$, de donde se tienen 420 y 840 múltiplos de 7. Si se toman todos los dígitos $0+2+4+6+8=20$ no es múltimplo de 3.

Si se toman cuatro dígitos los únicos cuya suma es múltiplo de 3 son $0+2+4+6=12$ y $0+4+6+8=18$. Para saber si un número terminado en 0 es divisible por 7, basta con revisar si el número sin su último dígito 0 lo es. Del conjunto $\{2,4,6\}$ todos los números que se pueden formar son 246, 264, 426, 462, 624, 642, de los cuales solamente 462 es divisible por 7. Del conjunto $\{4,6,8\}$ todos los números que se pueden formar son 468, 486, 648, 684, 846, 864 de los cuales ninguno es divisible por 7.

Por lo tanto los únicos que cumple lo pedido son 420, 840 y 4620.

15. Sean a y b dos números reales positivos. Si $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=4$, entonces el valor de $\dfrac{a+b}{a-b}$ es
    (a) 2
    (b) 4
    (c) $\sqrt{2}$
    (d) $\sqrt{3}$

- Opción correcta: (d)
- Solución:
  Observe que

$$\begin{aligned} \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=4 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{a^2+b^2}{ab}=4 \\ &\Leftrightarrow \quad a^2+b^2=4ab \end{aligned}$$

sumando $2ab$ se obtiene que $(a+b)^2=6ab$, y restando $2ab$ se obtiene que $(a-b)^2=2ab$, Luego

$$\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}=\frac{6ab}{2ab}=3$$

luego, $\dfrac{a+b}{a-b}=\sqrt{3}$.

16. Un docente de Matemáticas que vive en San José debe trasladarse hacia Golfito a impartir un curso de lógica mientras que otro profesor de Golfito viaja a San José a recibir una capacitación el mismo día. Parten a la misma hora hacia el lugar de destino y viajan a una velocidad constante. Si ambos se cruzan en el camino exactamente a la 1 pm, el primero llega a su destino a las 3 pm mientras que el segundo llega a las 9 pm, la hora a la que salieron es

    (a) 6 am

    (b) 7 am

    (c) 8 am

    (d) 9 am

- Opción correcta: (d)
- Solución:

  Si partieron a x horas y se encuentran a la 1pm en un determinado punto entonces la primer persona duró $13-x$ en recorrer dicha distancia mientras que el segundo lo hizo en 8 horas. La otra parte del trayecto el primero lo hace en 2 horas mientras que el segundo lo hace en $13-x$. Así, $\dfrac{13-x}{8}=\dfrac{2}{13-x}$, resolviendo la ecuación se obtiene que $x=9$. Por lo tanto la hora de sálida fue a las 9 am.

17. Si a y b son números reales positivos que cumplen $x^3y^4=a$ y $x^5y^6=b$, entonces x es

    (a) $\dfrac{b^2}{a^3}$

    (b) $\dfrac{b}{a}$

    (c) $\sqrt{\dfrac{a^5}{b^3}}$

    (d) $\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

- Opción correcta: (a)
- Solución:

  Despejando la y en la primer ecuación tenemos $y=\sqrt[4]{\frac{a}{x^3}}$. Sustituyendola en la segunda,

$$x^5\cdot\left(\sqrt[4]{\frac{a}{x^3}}\right)^6=b\Rightarrow x^{5-\frac{3}{4}\cdot 6}=\frac{b}{\sqrt[2]{a^3}}\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{b}{\sqrt[2]{a^3}}\Rightarrow x=\boxed{\frac{b^2}{a^3}}$$

18. A Alberto, con un motor viejo, le toma seis horas llenar una piscina de agua. A Bryan, con un motor más grande, le toma cuatro horas llenar la misma piscina. A Carlos, con un motor más moderno, le toma el mismo tiempo que le tomaría a Alberto y a Bryan si lo hacen juntos. Siempre que se llena la piscina se hace a un ritmo constante. La fracción de la piscina que podrían llenar los tres trabajando juntos en una hora es

    (a) $\frac{16}{24}$

    (b) $\frac{18}{24}$

    (c) $\frac{20}{24}$

    (d) $\frac{21}{24}$

- Opción correcta: (c)
- Solución:

  Alberto llena en x horas $x/6$ de la piscina, y Bryan en $x/4$, entonces $x/6+x/4=1 \implies x=12/5$, en este tiempo llenarían entre los 2 la piscina. Y eso es lo que le tomaría en horas a Carlos llenar la piscina. Entre los tres en x horas llenarían $x/6+x/4+5x/12$ de la piscina. En 1 hora sería $20/24$ de la piscina.

19. Si n y m son números naturales tales que $\frac{1280}{m\,(n+1)}=n^n$, entonces el valor de m es

    (a) 1

    (b) 2

    (c) 4

    (d) 5

- Opción correcta: (a)
- Solución:

  Debe cumplirse que $1280=m(n+1)n^n$. Además $1280=2^8\cdot 5=2^{2\cdot 4}\cdot 5=(2^2)^4\cdot 5=4^4\cdot(4+1)$. Lo que significa que $n=4$ y $m=1$

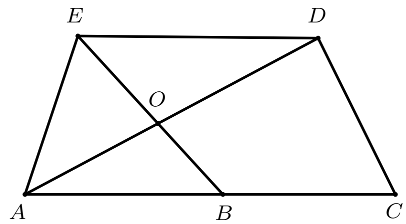
20. En la figura adjunta el $\square ACDE$ es un trapecio tal que $ED = 15$, $AC = 24$ y la altura del trapecio es 12. Si B es el punto medio $\overline{AC}$, el área del $\square OBCD$ es

    (a) 78

    (b) 112

    (c) 122

    (d) 234



- Opción correcta: (b)
- Solución:

  $(ACDE) = \frac{1}{2}(24+15)\cdot 12 = 234$, $(OBCD) = 234 - ((DEA) + (AOB))$

  $\triangle EOD \sim \triangle BOA(A-A)$ dado que $\angle EOD \cong \angle AOB$ por ser ángulos opuestos por el vértice; $\angle EDA \cong \angle DAC$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas.

  Sea h la altura del $\triangle EDO$ trazada desde el vértice O, se sigue que la medida de la altura del $\triangle AOB$, trazada desde el vértice O es $12-h$ y de la semejanza se concluye que:

  $$\frac{15}{12} = \frac{h}{12-h} \quad \Rightarrow h = \frac{20}{3} \quad 12 - h = \frac{16}{3}$$

  $$(DEA) = \frac{15\cdot 12}{2} = 90; \triangle AOB = \frac{12\cdot \frac{16}{3}}{2} = 32$$

  $$\therefore (OBCD) = 234 - (90+32) = 234 - 122 = 112$$

21. Se enumeran en una lista los números del 1 al 488. La diferencia entre la cantidad de veces que aparece el número 4 y la cantidad de veces que aparece el número 9 corresponde a

    (a) 89

    (b) 90

    (c) 99

    (d) 100

- Opción correcta: (d)
- Solución:

  Escribimos los números como {001,002,003,. . . ,488}
  El número de 4's que aparecen como primer dígito es 89,
  El número de 4's que aparecen como segundo dígito es 50,
  El número de 4's que aparecen como tercer dígito es 49.
  En total aparecen 188 4's.
  El número de 9's que aparecen como primer dígito es 0,

El número de 9's que aparecen como segundo dígito es 40,
El número de 9's que aparecen como tercer dígito es 48.
En total aparecen 88 9's.
La diferencia es 100.

22. Alicia escribe una ecuación en la pizarra, diciendo que tiene soluciones en los números enteros positivos:

$$m\left(m^k - m\cdot k + m^2 + 1\right) = 2018$$

Con certeza se cumple que

(a) $k = 2$
(b) $k = 10$
(c) $m = 3$
(d) $m = 10$

- Opción correcta: (b)
- Solución:

Nótese que $2018 = 2\times 1009$, donde ambos números son primos, por lo que las únicas fromas de descomponer 2018 son $2018 = 1\cdot 2018 = 2\cdot 1009$. De aquí se deduce que $m \in \{1, 2, 1009, 2018$. Es claro que en los últimos dos casos no habría solución entera.
Si $m = 1$ se tiene $m^k - m\cdot k + m^2 + 1 = 1^k - 1\cdot k + 1^2 + 1 = 3 - k = 2018$, de donde $k = -2015$.

Si $m = 2$, entonces $m^k - m\cdot k + m^2 + 1 = 2^k - 2\cdot k + 2^2 + 1 = 2^k - 2k + 5 = 1009$, es decir, $2^k - 2k = 1004$, de donde $k = 10$.

23. Considere el $\triangle ABC$, con D en $\overline{BC}$, y sea $\overline{AD}$ bisectriz del $\angle BAC$. La perpendicular a $\overline{BC}$ por D corta a $\overline{AC}$ en E. Si $AE = ED = \dfrac{EC}{3}$ y $AD = \sqrt{3}$, entonces el área del $\triangle ABC$ es

(a) $2\sqrt{2}$
(b) $2\sqrt{3}$
(c) $3\sqrt{2}$
(d) $3\sqrt{3}$

- Opción correcta: (a)
- Solución:

Sea $AE = x$ y $\angle DAC = \alpha$, así $EC = 3x$ y $\angle ACB = 90 - 2\alpha$, por lo que $\angle ABC = 90$ y $\triangle ABC \sim \triangle EDC$ con razón de semejanza $\frac{4}{3}$. Por Pitágoras $DC = 2\sqrt{2}x$, por semejanza $BD = \frac{2\sqrt{2}}{3}x$ y $AB = \frac{4}{3}x$, por pitágoras $AD = \frac{2\sqrt{6}}{3}x$ de donde $x = \frac{3\sqrt{2}}{4}$. Así $AB = \sqrt{2}$ y $BC = 4$, de donde $(ABC) = 2\sqrt{2}$

24. La suma de los dígitos del número entero positivo n que cumple que $n+1$ y $\dfrac{n}{8}+34$ son cubos perfectos es

    (a) 17

    (b) 18

    (c) 19

    (d) 20

- Opción correcta: (a)

- Solución:

  Si $n+1 = x^3$ y $\frac{n}{8}+34 = y^3$ entonces $271 = 8y^3 - x^3 = (2y-x)(4y^2+2yx+x^2)$. Como 271 es primo se tiene que $2y - x = 1$, de donde $(x+1)^2 + (x+1)x + x^2 = 271 \Rightarrow x^2 + x - 90 = 0 \Rightarrow (x+10)(x-9) = 0$, de donde $x = 9$, y así $n = 728$ y la suma de sus dígitos es 17.

25. Considere la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(n) = \left\lfloor \frac{4039n}{2018} \right\rfloor$$

donde $\lfloor x \rfloor$ representa la parte entera de x; por ejemplo, $\lfloor 0{,}5 \rfloor = 0$, $\lfloor 1{,}4 \rfloor = 1$, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$ y $\lfloor \pi \rfloor = 3$. El resultado de $f(1) + f(2) + \cdots + f(675)$ es

   (a) 456 300

   (b) 456 301

   (c) 456 302

   (d) 456 303

- Opción correcta: (d)

- Solución:

  Observe que $4039 = 2 \cdot 2018 + 3$, luego

$$f(n) = \left\lfloor \frac{4039n}{2018} \right\rfloor = \left\lfloor 2n + \frac{3n}{2018} \right\rfloor = 2n + \left\lfloor \frac{3n}{2018} \right\rfloor ,$$

  por otro lado, se tiene que $3 \cdot 672 = 2016$, luego

$$\left\lfloor \frac{3n}{2018} \right\rfloor = 0$$

  para $1 \leq n \leq 672$, y

$$\left\lfloor \frac{3n}{2018} \right\rfloor = 1$$

para $673 \leq n \leq 675$, luego

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(675) = 2(1 + 2 + \cdots + 675) + 1 + 1 + 1 = 675 \cdot 676 + 3 = 456303$$