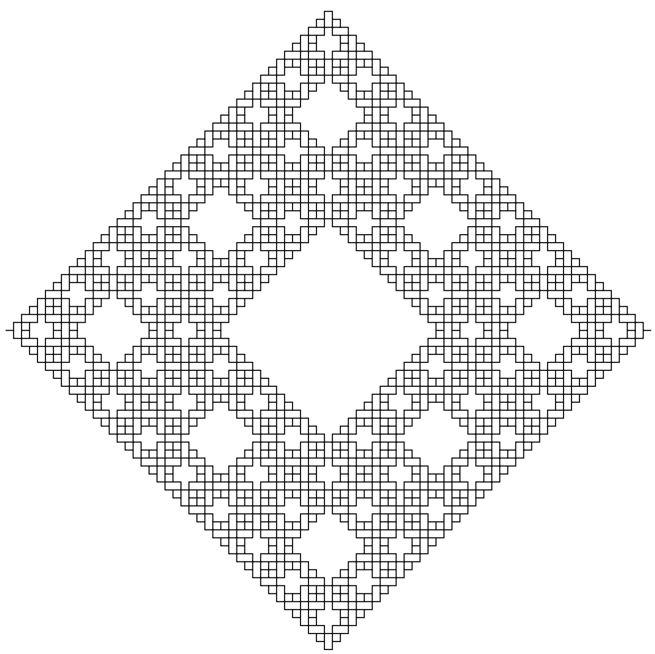
XXX Olimpiada Costarricense de Matemáticas

MEP–UNA–UCR–MICITT–UNED–ITCR

Solución

II Eliminatoria



Nivel III

(10° – 11° – 12°)

2018

Estimado estudiante:

La Comisión Organizadora de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas le saluda y felicita por haber clasificado a la segunda eliminatoria nacional de estas justas académicas. La prueba consta de dos partes: una primera parte de 12 preguntas de selección única, ponderadas con dos puntos cada respuesta correcta, y una segunda parte con tres preguntas de desarrollo, con un valor de siete puntos cada solución correcta.

Los resultados de esta eliminatoria se publicarán a partir del viernes 5 de octubre, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en las hojas de respuestas que se le han entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en las hojas de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 pts c/u**

1. Si a, b y c son números enteros positivos, tales que $ab-1$ es par, entonces con certeza $7^{b+c}a+(b-3)^2\,c$ es

   (a) par

   (b) impar

   (c) par únicamente si c es impar

   (d) impar únicamente si c es par

- Opción correcta: (b)
- Solución:

  Como $(ab-1)$ es par entonces ab es impar y esto significa que a y b son impares, como 7 es impar la potencia 7^{b+c} es impar, finalmente $7^{b+c}a$ es impar.

  Por otro lado, como b es impar entonces $b-3$ es par y la potencia $(b-3)^2$ es par, luego $(b-3)^2c$ es par (independiente de c).

  Por tanto la suma de un número impar y un par dar como resultado un número impar.

2. Sea N el menor entero positivo con exactamente 11 divisores primos positivos. Al dividir N entre 11 el residuo corresponde a

   (a) 0

   (b) 1

   (c) 3

   (d) 5

- Opción correcta: (a)
- Solución:

  N debe ser el producto de los primeros 11 primos.

  Así. $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \mathbf{11} \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$, que es divisible por 11, por lo que el residuo de N dividido entre 11 es 0.

3. Se lanza una moneda al aire en 10 oportunidades. La probabilidad de que caigan exactamente tres escudos es

   (a) $\dfrac{15}{128}$

   (b) $\dfrac{15}{64}$

   (c) $\dfrac{1}{32}$

   (d) $\dfrac{1}{10}$

- Opción correcta: (a)
- Solución:

  Considere C por corona y E por escudo.

  El resultado de los diez lanzamientos pueden expresarse por una sucesión de longitud 10 formada por las caras de la moneda C y E, entonces el número total de posibilidades es $2^{10} = 1024$.

  Los casos favorables es cuando se lanza la moneda 10 veces y salen exactamente 3 veces escudos, entonces el total de casos favorables es $\dbinom{10}{3} = \dfrac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$.

  Por lo tanto, la probabilidad de que al lanzar una moneda al aire 120 veces salgan exactamente 3 escudos es $\dfrac{120}{1024} = \dfrac{15}{128}$.

4. Se construye una secuencia a_n de números como sigue:

   - Se empieza con $a_1 = 123$.
   - a_2 se forma escribiendo 123 entre todos los dígitos de a_1, por lo que $a_2 = \mathbf{1}\ 123\ \mathbf{2}\ 123\ \mathbf{3}$.
   - Para a_3 se inserta como antes 123 entre todos los dígitos de a_2; así:

     $a_3 = \mathbf{1}\ 123\ \mathbf{1}\ 123\ \mathbf{2}\ 123\ \mathbf{3}\ 123\ \mathbf{2}\ 123\ \mathbf{1}\ 123\ \mathbf{2}\ 123\ \mathbf{3}\ 123\ \mathbf{3}$

   - Se continúa de la misma forma en cada paso siguiente para obtener cada término a_n que se desee.

   La cantidad de dígitos que tendrá a_{2018} corresponde a

   (a) $2^{2018} + 1$
   (b) $2^{2019} + 1$
   (c) $2^{4035} + 1$
   (d) $2^{4037} + 1$

- Opción correcta: (c)
- Solución:

  Sea b_n el número de dígitos que tiene el número a_n. Se observa que

  $b_1 = 3 = 2^1 + 1$
  $b_2 = 3 \cdot 2 + 3 = 9 = 2^3 + 1$
  $b_3 = 3 \cdot 8 + 9 = 33 = 2^5 + 1$
  $b_4 = 3 \cdot 32 + 33 = 129 = 2^7 + 1$
  $b_n = 3 \cdot (b_{n-1} - 1) + b_{n-1} = 2^{2n-1} + 1$

  Por lo tanto, $b_{2018} = 2^{4035} + 1$ es la cantidad de dígitos que tendrá a_{2018}.

5. Una familia quiere ponerle a su hijo un nombre de tres letras, con las 27 letras que componen el alfabeto, las cuales quieren que estén en el orden usual y estas se pueden repetir; por ejemplo, si fueran las letras A, A y B, el único nombre posible sería AAB. La cantidad de nombres con estas características corresponde a

   (a) 2925

   (b) 3276

   (c) 3303

   (d) 3654

- Opción correcta: (d)
- Solución:

  Note que si ya se tienen las tres letras escogidas solo existe una opción posible para ordenarlas. Como las letras pueden repetirse o no, se tienen tres casos para escogerlas: que sean todas distintas, que sean todas iguales, que hayan dos iguales y una distinta.

  I Caso: Si son todas distintas, basta tomar 3 de 27.

  Es decir, $\binom{27}{3} = \dfrac{27!}{3! \cdot 24!} = \dfrac{27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24!}{6 \cdot 24!} = \dfrac{27 \cdot 26 \cdot 25}{6} = 9 \cdot 13 \cdot 25 = 2925.$

  II Caso: Todas las letras repetidas son $\binom{27}{1} = 27$

  III Caso: Dos repetidas y una diferente basta escoger 2 letras de las 27 y luego multiplicar por dos, pues una vez seleccionadas, cualquiera de las dos puede repetirse, es decir $2\binom{27}{2} = 702$

  Por lo tanto la cantidad de nombres con estas características es $\binom{27}{3} + 2\binom{27}{2} + \binom{27}{1} = 3654.$

6. La cantidad de pares (x, y) de enteros que cumplen $x \leq y$ y que satisfacen que su producto sea igual a 5 veces su suma corresponde a

   (a) 4

   (b) 5

   (c) 6

   (d) 7

- Opción correcta: (a)

- Solución: Se tiene que $xy = 5\,(x + y) = 5x + 5y$ de donde $y = \dfrac{5x}{x-5}$, o de manera similar $x = \dfrac{5y}{y-5}$.

  Los posibles valores para el denominador son $-5, -1, 1$ o 5, pues en el resto de los casos, no queda un número entero.

  Para que el denominador sea -5 entonces $x = y = 0$; para que el denomidor sea -1, se tendría $y = 4$ y $x = -20$; para que el denominador sea 1, se tendría $x = 6$ y $y = 30$, y para que el denominador sea 5 se tendría $x = y = 10$.

  Así que en total son cuatro posibilidades.

7. Rolando tiene en su alcancía un total de 2018 monedas de todas las denominaciones (500, 100, 50, 25, 10 y 5 colones, respectivamente). La cantidad de monedas de una denominación menor es mayor que la cantidad de monedas de una denominación mayor, en todos los casos. La cantidad máxima de dinero, en colones, que puede tener Rolando corresponde a

   (a) 230 350

   (b) 230 300

   (c) 203 050

   (d) 230 350

- Opción correcta: (*b*)
- Solución:

  Sean a, b, c, d, e y f, respectivamente, las cantidades de monedas de 500, 100, 50, 25, 10 y 5. Se necesita que $a < b < c < d < e < f$ y que $a + b + c + d + e + f = 2018$.

  Para obtener la mayor cantidad de dinero posible, debería haber la mayor cantidad posible de monedas de 500. La mejor forma de distribuir es que cada denominación menor tenga apenas una moneda más que las de la denominación inmediatamente mayor; es decir, lo ideal sería que

  $$b = a + 1,\ c = a + 2,\ d = a + 3,\ e = a + 4,\ f = a + 5$$

  Pero $a+(a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+4)+(a+5) = 6a+15 = 2018 \Rightarrow a = 333{,}8\overline{3}$; es decir, $a \notin \mathbb{N}$

  Tomando $a = 334$ se sobrepasa de 2018 monedas y tomando $a = 333$ se obtiene 2013 monedas, es decir, quedan 5 monedas por distribuir.

  La siguiente denominación mayor (100) debería tener entonces una moneda más, lo que obliga a sumar una a cada una de las denominaciones menores (50, 25, 10 y 5).

  Así, $a = 333, b = 335, c = 336, d = 337, e = 338$ y $f = 339$.

  La cantidad de dinero total es

  $$333 \cdot 500 + 335 \cdot 100 + 336 \cdot 50 + 337 \cdot 25 + 338 \cdot 10 + 339 \cdot 5 = 230\,300$$

8. Considere el conjunto $F = \{1, 2, 3, \ldots, 50\}$ y sea S subconjunto de F, que contiene la mayor cantidad de elementos posibles entre los cuales no existen dos elementos cuya suma sea divisible por 7. La cantidad de elementos de S corresponde a

   (a) 14

   (b) 22

   (c) 23

   (d) 25

- Opción correcta: (c)
- Solución:

  Sea $F = \{1, 2, 3, \ldots, 50\}$, se procede a dividir F en 7 subconjuntos $F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$ tales que todos los elementos de F_i tengan el mismo residuo i cuando son dividos por 7:

  $F_0 = \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49\}$

  $F_1 = \{1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50\}$

  $F_2 = \{2, 9, 16, 23, 30, 37, 44\}$

  $F_3 = \{3, 10, 17, 24, 31, 38, 45\}$

  $F_4 = \{4, 11, 18, 25, 32, 39, 46\}$

  $F_5 = \{5, 12, 19, 26, 33, 40, 47\}$

  $F_6 = \{6, 13, 20, 27, 34, 41, 48\}$

  Se puede observar que S puede contener a lo más un miembro de F_0, y si S contiene algún miembro de cualquiera de los otros subconjuntos, entonces este puede contener a todos los miembros de ese subconjunto. También, S no puede contener miembros de F_1 y F_6 al mismo tiempo , o F_2 y F_5, o F_3 y F_4. Como F_1 contiene 8 elementos y cada uno de los otros subconjuntos contienen 7 elementos, el subconjunto S más grande puede ser construido seleccionando un elemento de F_0, todos los elementos de F_1, todos los elementos de F_2 o F_5, todos los elementos que pueden ser de F_3 o F_4. Por lo tanto, el subconjunto S más grande contiene $1+8+7+7 = 23$ elementos.

9. Considere las igualdades $r - q = 2p$ y $rq + p^2 = 676$, donde p, q y r son primos. El producto de p, q y r corresponde a

   (a) 2018

   (b) 2015

   (c) 2001

   (d) 1998

- Opción correcta: (c)
- Solución:

  Se considera $x = r - p = q + p$. Entonces,

$$x^2 = (r-p)(q+p) = rq + (r-q)p - p^2 = rq + 2p^2 - p^2 = rq + p^2 = 676$$

  Se obtiene $x = 26$. Y p es un primo tal que $26 - p$ y $26 + p$ son primos.

  Se prueba con los posibles primos p menores que 26 y se ve que eso solo se cumple para $p = 3$.

  Así, $p = 3$, $q = 23$ y $r = 29$ entonces $p \cdot q \cdot r = 2001$.

10. Dos circunferencias son tangentes exteriormente en el punto C, $\overleftrightarrow{AB}$ es una tangente común que no contiene a C, con A y B puntos de tangencia. Si se tiene que $AC = 8$ y $BC = 6$, entonces la medida de uno de los radios de las circunferencias corresponde a

    (a) $\frac{5}{6}$

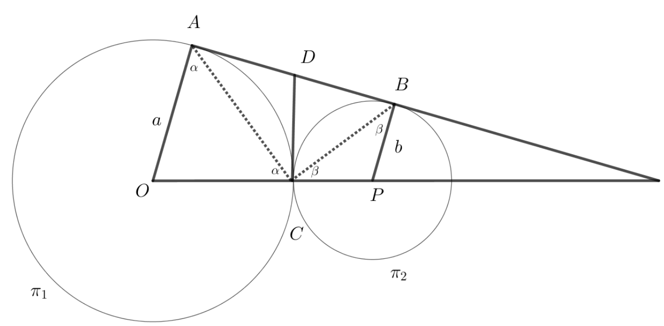
    (b) $\frac{5}{8}$

    (c) $\frac{3}{20}$

    (d) $\frac{15}{4}$

- Opción correcta: (d)
- Solución:

  Sean π_1 y π_2 las dos circunferencias tangentes en C donde O y P son los centros y a y b los radios. Sea D la intersección de la tangente común $\overleftrightarrow{AB}$ con la tangente común por C.



Como $\overline{AO} \parallel \overline{BP}$, se tiene que $m\angle AOC + m\angle CPB = 180°$, luego $\alpha + \beta = 90°$ y entonces el $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo con ángulo recto en C, por Teoremas de Pitágoras se obtiene que $AB = 10$ y $AD = DC = DB = 5$.

Como $\overline{DC} \perp \overline{OP}$, tambien se tiene que $m\angle DAC = m\angle DCA = \beta$ y $m\angle DCB = m\angle DBC = \alpha$, por lo que $\triangle ADC \sim \triangle CPB$ se tiene $\frac{b}{6} = \frac{5}{8} \Rightarrow b = \frac{15}{4}$.

11. Se calcula el producto de los dígitos de todos los números de cuatro dígitos. La suma de todos los productos obtenidos corresponde a

    (a) 3^{45}

    (b) 4^{45}

    (c) 45^3

    (d) 45^4

- Opción correcta: (d)
- Solución:

  Todos los números que tienen un 0 en su representación, tienen por producto de sus dígitos 0, y por lo tanto, no aportan a la suma.

  Consideremos los números con dígitos $x, y, z, w \neq 0$, entonces los productos son $xyzw$.

  Nótese que si x, y y z son fijos, y w varía del 1 al 9, entonces estos números contribuyen a la suma

  $$xyz\,(1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 45xyz$$

  Entre todos los que tienen x y y fijos, aportan a la suma

  $$45xy\,(1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 45^2xy$$

  Siguiendo la misma lógica, se concluye que la suma es 45^4.

12. Sean $\square ABCD$ un cuadrado y M el punto de intersección de sus diagonales. Si la bisectriz del $\angle BAC$ interseca a $\overline{BD}$ en E y a $\overline{BC}$ en F, entonces la razón $CF : ME$ corresponde a

    (a) 2

    (b) 3

    (c) $\dfrac{5}{2}$

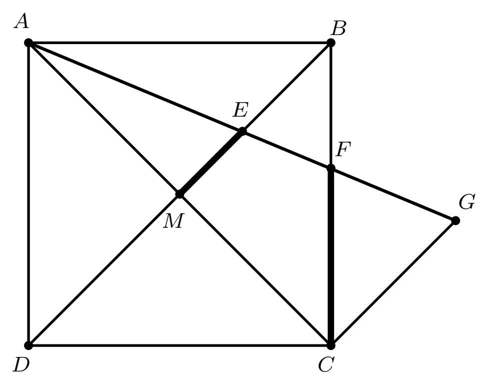
    (d) $\dfrac{3}{2}$

- Opción correcta: (a)
- Solución:

  Considere un cuadrado de lado 1, entonces $AC = BD = \sqrt{2}$ y $AM = BM = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

  Sean $CF = x$ y $ME = y$.

  Considere G en la bisectriz del $\angle BAC$, de manera que $\triangle CFG$ sea isósceles con $CF = CG$, como se muestra en la figura.



Se tiene que $\triangle ABF \sim \triangle ACG$ (por criterio A-A), por lo que

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BF}{CG} = \frac{BF}{CF} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1-x}{x} \Rightarrow x = \frac{2}{2+\sqrt{2}}$$

De manera análoga, en $\triangle ABM$ se tiene que $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{BE}{ME} \Rightarrow \sqrt{2} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}} - y}{y} \Rightarrow y = \dfrac{\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}$

Por lo que

$$\frac{CF}{ME} = \frac{x}{y} = \frac{\dfrac{2}{2+\sqrt{2}}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}} = 2$$

II Parte: Desarrollo **Valor 21 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. Determine el número natural N más grande, en el que todos sus dígitos son distintos, tal que N es múltiplo de 8, 11 y 15 de manera simultánea.

Solución

Nótese que el número no podría tener más de diez dígitos, y en dicho caso, se usarían todos los dígitos, y al ser la suma de los enteros entre 0 y 9 igual a 45, divisible por 3. Al ser el número divisible entre 5 (al serlo por 15), entonces el último dígito es 0 o 5. Como se trata de un número par (al ser divisible por 8), se tiene que el último dígito es 0. Además, entre más cerca de 9876543210 se encuentre el número, mejor. Sin embargo, dicho número no es divisible entre 8.

Asumamos que solo dos dígitos cambian de lugar, entonces el número tendría que ser 9876543120. Sin embargo, este número no es divisible entre 11, puesto que $9-8+7-6+5-4+3-1+2-0=7$ que no es divisible entre 11. De ser los últimos tres dígitos los que se cambian, entonces el número tendrá que ser 9876541320 para que sea múltiplo de 8 y el 3 cambie de lugar. Pero nuevamente, $9-8+7-6+5-4+1-3+2-0=3$, que no es divisible entre 11.

Consideremos por lo tanto que el número que estamos buscando es de la forma $98765abcd0$, donde $\{a,b,c,d\}=\{1,2,3,4\}$. Nótese que d es par, por lo que $d=2$ o $d=4$. Si $d=2$, entonces tendríamos que $9-8+7-6+5-a+b-c+2=9+b-(a+c)$ es divisible entre 11. Sin embargo, dado que $\{a,b,c\}=\{1,3,4\}$, entonces $9+b-(a+c)$ tomaría los valores de 9, 7 o 3, ninguno de los cuales es divisible entre 11. Si $d=4$, entonces c es par, y el único par posible es 2, por lo que tenemos el número $98765ab240$, y por lo tanto $9-8+7-6+5-a+b-2+4=9+b-a$. Dado que $\{a,b\}=\{1,3\}$, si $b=3$ y $a=1$ tendríamos que $9+b-a=11$, y por lo tanto, 9876513240 es divisible entre 11. Además, como termina en 240, es divisible entre 8 y, finalmente, como termina en 0 y la suma de sus dígitos es divisible entre 3, entonces también es divisible entre 15.

2. El profesor Rolando soñó anoche que un antepasado suyo lo visitó y le dijo: "si tomo el año en que yo nací, escrito como un número de cuatro dígitos, invierto las cifras y al número mayor le resto el número menor se obtiene 2018". Cuando despertó pensó que lo que le dijo su antepasado era imposible. Indique, justificando su respuesta, si el profesor Rolando tiene razón.

Solución

Si $abcd$ corresponde con el año de nacimiento de su antepasado, se debe cumplir que

$$\begin{aligned}
& abcd - dcba = 2018 \\
\Rightarrow\ & 1000a + 100b + 10c + d - 1000d - 100c - 10b - a = 2018 \\
\Rightarrow\ & 999a + 90b - 90c - 999d = 2018 \\
\Rightarrow\ & 999\,(a-d) + 90\,(b-c) = 2018 \\
\Rightarrow\ & 9\,(111\,(a-d) + 10\,(b-c)) = 2018
\end{aligned}$$

Pero lo anterior no es posible ya que 2018 no es múltiplo de 9.

Solución

Se tienen dos casos iniciales para el año de nacimiento del antepasado: $1abc$ o $0abc$.

I Caso: Año de nacimiento $1abc$.

$1abc - cba1 = 2018$ es imposible, porque para que se cumpla el valor en el dígito de las unidades, necesariamente $c = 9$, pero entonces $1ab9 - 9ba1 < 0 \neq 2018$.

Si $cba1 > 1abc$, $cba1 - 1abc = 2018$.

Para que se cumpla el valor en el dígito de las unidades, necesariamente $c = 3$, teniendo entonces

$$\begin{array}{ccccc}
 & \mathrm{M} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{U} \\
 & 3 & b & a & 1 \\
- & 1 & a & b & 3 \\
\hline
 & 2 & 0 & 1 & 8
\end{array}$$

Continuando con el proceso de la resta se tiene

$$\begin{array}{ccccc}
 & \mathrm{M} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{U} \\
 & 3 & b & (a-1) & 11 \\
- & 1 & a & b & 3 \\
\hline
 & 2 & 0 & 1 & 8
\end{array}$$

Si $a - 1 \neq 0$, en la casilla de las decenas se tiene $a - 1 - b = 1$, de donde $a = b + 2$; mientras que en la casilla de las centenas $b - a = 0$, de donde $a = b$, lo cual es imposible.

Si $a - 1 = 0$ entonces $b = 9$, pero $3911 - 1193 = 2718 \neq 2018$.

II Caso: Año de nacimiento $0abc$.

$0abc - cba0 = 2018$ es imposible, porque para que se cumpla el valor en el dígito de las unidades, necesariamente $c = 8$, pero entonces $0ab8 - 8ba0 < 0 \neq 2018$.

Para que $cba0 - 0abc = 2018$, se debe tener $c = 2$, teniendo entonces

$$\begin{array}{ccccc}
 & \mathrm{M} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{U} \\
 & 2 & b & a & 0 \\
- & 0 & a & b & 2 \\
\hline
 & 2 & 0 & 1 & 8
\end{array}$$

Continuando con el proceso de la resta se tiene

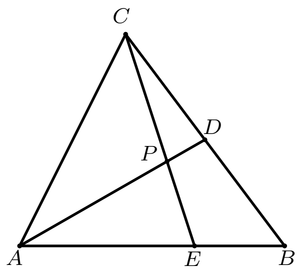
	M	C	D	U
	2	b	$(a-1)$	10
-	0	a	b	2
	2	0	1	8

Si $a-1 \neq 0$, en la casilla de las decenas se tiene $a-1-b=1$, de donde $a=b+2$; mientras que en la casilla de las centenas $b-a=0$, de donde $a=b$, lo cual es imposible.

Si $a-1=0$ entonces $b=9$, pero $2910-0192=2718 \neq 2018$.

Por lo tanto, el profesor Rolando tiene razón.

3. Considere la figura siguiente en la que $A-E-B$, $C-D-B$ y P es el punto de intersección de $\overline{CE}$ y $\overline{AD}$.



Si $\dfrac{CD}{DB}=\dfrac{3}{1}$ y $\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{3}{2}$, determine $\dfrac{CP}{PE}$.

Solución

Sea R un punto tal que $C-R-P$ y $DR \parallel AB$, así $\dfrac{CR}{RE}=\dfrac{CD}{DB}=\dfrac{3}{1}$, $\dfrac{RD}{EB}=\dfrac{CD}{CB}=\dfrac{3}{4}$ y así: $CR=3RE=3\,(RP+PE)$, $RD=\dfrac{3}{4}EB$, además $CP=CR+RP=4RP+3PE$.

Como $\triangle RDP \sim \triangle EAP$, $\dfrac{RP}{PE}=\dfrac{RD}{AE} \quad \Rightarrow RD=\dfrac{RP\cdot AE}{PE}$ pero $AE=\dfrac{3}{2}EB$ y así

$$RD=\frac{RP}{PE}\cdot\frac{3}{2}EB \quad \Rightarrow \frac{3}{4}EB=\frac{3}{2}EB\cdot\frac{RP}{PE} \Rightarrow RP=\frac{1}{2}PE$$

$$\therefore CP=4\cdot\frac{1}{2}PE+3PE=5PE \quad \Rightarrow \frac{CP}{PE}=5$$