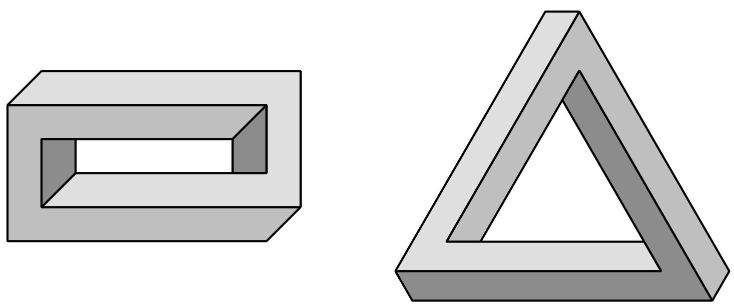
XXX Olimpiada Costarricense de Matemáticas

MEP–UNA–UCR–MICITT–UNED–ITCR

Solución

II Eliminatoria



Nivel I

(7°)

2018

Estimado estudiante:

La Comisión Organizadora de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas le saluda y felicita por haber clasificado a la segunda eliminatoria nacional de estas justas académicas. La prueba consta de dos partes: una primera parte de 12 preguntas de selección única, ponderadas con dos puntos cada respuesta correcta, y una segunda parte con tres preguntas de desarrollo, con un valor de siete puntos cada solución correcta.

Los resultados de esta eliminatoria se publicarán a partir del viernes 5 de octubre, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en las hojas de respuestas que se le han entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en las hojas de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 pts c/u**

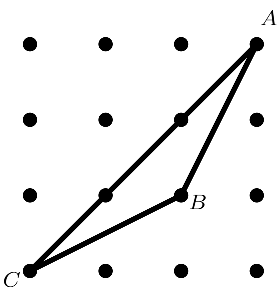
1. En la figura adjunta, las distancias horizontales y verticales entre puntos consecutivos son iguales a 1 cm. El área, en cm^2, del triángulo ABC corresponde a

   (a) 3

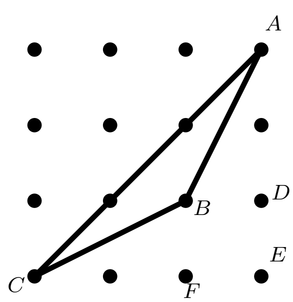
   (b) 4

   (c) 1,5

   (d) 4,5



- Opción correcta: (c)
- Solución:



$$\begin{aligned}(AEC) &= (ABC) + (CBF) + (ABD) + (BDEF)\\ 4{,}5 &= (ABC) + 1 + 1 + 1\\ 1{,}5 &= (ABC)\end{aligned}$$

2. Un faro emite tres colores distintos:

   - Rojo cada 16 segundos
   - Verde cada 45 segundos
   - Blanco cada 2 minutos y 20 segundos

   Los tres colores son emitidos, simultáneamente, a media noche. La frecuencia con que son emitidos simultáneamente los colores rojo y blanco corresponde a

   (a) 720 segundos

   (b) 21 minutos

   (c) 9 minutos y 20 segundos

   (d) 1 hora y 24 minutos

- Opción correcta: (c)
- Solución:

  El color rojo se emite cada 16 segundos.
  El color verde se emite cada 45 seguntos.
  El color blanco se emite cada 2 minutos y 20 segundos, es decir cada 140 segundos.

  Calculamos el m.c.m de 16 y 140.

$$\begin{array}{cc|c} 16 & 140 & 2 \\ 8 & 70 & 2 \\ 4 & 35 & 2 \\ 2 & 35 & 2 \\ 1 & 35 & 5 \\ 1 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

  Los colores rojo y blanco coiniciden cada 560 segundos, es decir cada 9 minutos y 20 segundos.

3. La cantidad de números primos de tres cifras que existen, tales que al suprimirle la cifra de las centenas el número resultante es un cuadrado perfecto corresponde a

   (a) 5

   (b) 6

   (c) 7

   (d) 8

- Opción correcta: (b)
- Solución:

  Para ser cuadrado perfecto el número deberá terminar en 16, 25, 36, 49, 64 y 81, pero solamente podrán ser primos los terminados en 49 y 81. Así, se tendrá una lista de 18 números.

149	181
249	281
349	381
449	481
549	581
649	681
749	781
849	881
949	981

  Aplicando las reglas de divisibilidad se obtiene que solamente los números 149, 181, 281, 349, 449 y 881 son primos.

4. Un rectángulo mide 192×84. Se corta el cuadrado de mayor tamaño que se pueda del rectángulo con un solo corte. Si ambas piezas resultantes son cuadrados, el proceso termina, sino se repite el proceso recortando el rectángulo no cuadrado. La cantidad de piezas que resultan al final del proceso corresponde a

   (a) 6

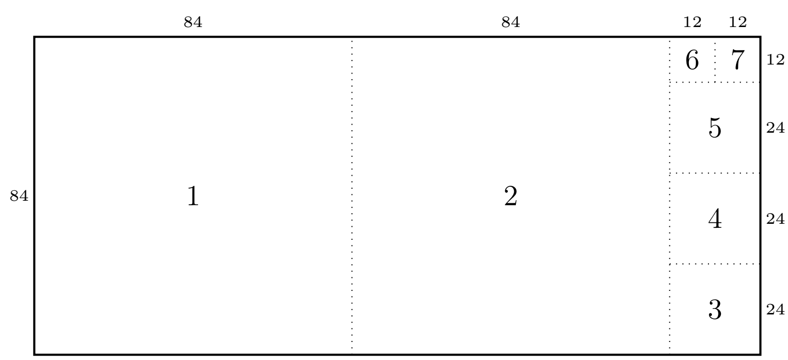
   (b) 7

   (c) 8

   (d) 9

- Opción correcta: (b)
- Solución:

  Nótese que lo más que puede medir el cuadrado en cuestión (de hecho, exáctamente lo único que puede medir) es la longitud menor del rectángulo restante. Entonces, si se quita un cuadrado (1) de 84×84, la pieza restante mide 108×84. De aquí se quita un cuadrado (2) de 84×84, y queda un rectángulo de 84×24. Se quita un cuadrado (3) de 24×24, quedando 60×24, se quita un cuadrado (4) de 24×24, quedando 36×24, se quita un cuadrado (5) de 24×24, quedando 12×24, de donde se sacan dos cuadrados de 12×12.



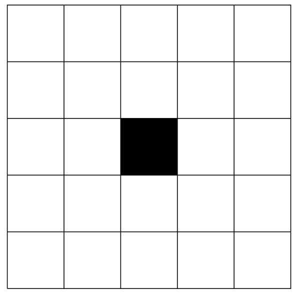
5. En la figura adjunta, se ha creado un cuadrado 5×5 conformado por cuadritos de dimensiones 1×1. La cantidad de cuadrados conformados por cuadritos 1×1 que contienen al cuadrado negro del centro corresponde a

   (a) 16

   (b) 17

   (c) 18

   (d) 19



- Opción correcta: (d)
- Solución:

  Contando por cada tamaño se tiene que

  - Existe un cuadrado de tamaño 1×1.
  - Existen 4 cuadrados de tamaño 2×2.
  - Existen 9 cuadrados de tamaño 3×3.
  - Existen 4 cuadrados de tamaño 4×4.
  - Existe un cuadrado de tamaño 5×5.

  Por lo tanto, el total es $1 + 4 + 9 + 4 + 1 = 19$.

6. Considere el $\triangle ABC$ en el que M es el punto medio de $\overline{BC}$, D es un punto en $\overline{AC}$, tal que $\overline{BD} \perp \overline{AC}$, y $DM = MC$. Si $m\angle BAC = 45°$ y $m\angle ACB = 30°$, entonces $m\angle AMB$ corresponde a

   (a) 15°

   (b) 30°

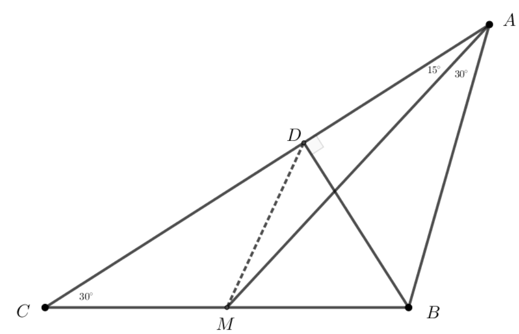
   (c) 45°

   (d) 60°

- Opción correcta: (c)
- Solución:

  El $\triangle DCM$ es isósceles, ya que $DM = MC$, por lo que $m\angle CDM = 30°$; además, $\overline{DB} \perp \overline{AC} \Rightarrow m\angle BDM = 60°$.

  Dado que el $\triangle MDB$ también es isósceles pues $DM = MB$, se tiene que $m\angle MBD = 60°$; así, el $\triangle DMB$ es equilátero. Dado que el triángulo rectángulo $\triangle ADB$ posee un ángulo agudo de medida 45°, el otro ángulo agudo también mide 45° y $AD = DB$; de esta manera, $AD = BD = DM = MB$.

  En el triángulo isósceles $\triangle ADM$, $AD = DM$ y $m\angle ADM = 90° + 60° = 150°$, por lo que los otros dos ángulos de este triángulo miden lo mismo, cada uno mide 15°.

  Por último, en el $\triangle DMB$ (equilátero) se tiene que $m\angle AMB = 60° - m\angle DMA = 60° - 15° = 45°$.

7. La suma de todos los enteros positivos menores que 100 y que tienen exactamente tres divisores positivos diferentes corresponde a

   (a) 87

   (b) 88

   (c) 176

   (d) 177

- Opción correcta: (a)
- Solución:

  Si un número tiene solo tres divisores, entonces debe ser el cuadrado de un número primo; así, se tiene que: $S = 4 + 9 + 25 + 49 = 87$.

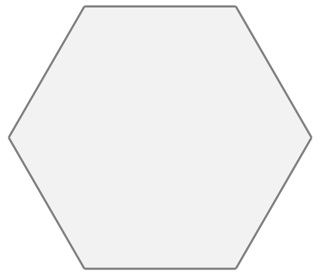
8. Considere la figura adjunta, en la que cada uno de sus lados mide dos unidades. Si se escogen siete puntos cualesquiera en el interior de la figura, se cumple con certeza que dos de los puntos dados están a una distancia

   (a) menor de dos unidades

   (b) mayor de dos unidades pero menor de tres unidades

   (c) mayor de tres unidades pero menor de cuatro unidades

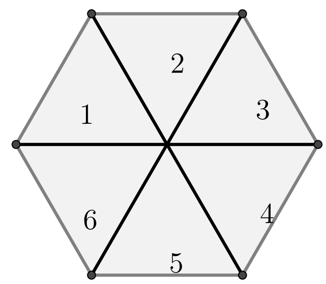
   (d) mayor de cuatro unidades



- Opción correcta: (a)
- Solución:

  Divida la región en seis triángulos equiláteros, como se muestra en la siguiente figura:

  Si se escogen siete puntos en la región, se puede asignar cada uno de ellos a un triángulo que lo contenga. Si el punto pertenece a varios triángulos, asígnelo arbitrariamente a uno de ellos. Entonces los siete puntos están asignados a seis regiones triangulares, de modo que por el principio de las casillas por lo menos dos puntos pertencen a uno de los triángulos. Entre estos dos puntos no puede haber una distancia mayor a dos unidades.



9. Considere el rectángulo $ABCD$. Sean los puntos E sobre $\overline{AB}$, y F sobre $\overline{AD}$, tales que $A-E-B$ y $A-F-D$, respectivamente. Si $\angle BEC \cong \angle FEC$ y $\angle EFC \cong \angle DFC$, entonces $m\angle BCE + m\angle DCF$ corresponde a

   (a) $30°$

   (b) $45°$

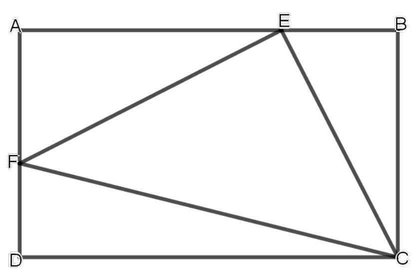
   (c) $60°$

   (d) $75°$

- Opción correcta: (b)
- Solución:

  Considere la siguiente figura.

  $m\angle BEC + m\angle CEF + m\angle FEA = 180°$ y $m\angle DFC + m\angle CFE + m\angle EFA = 180°$



Luego como $\angle BEC \cong \angle FEC$ y $\angle EFC \cong \angle DFC$ entonces $2m\angle CEF + m\angle AEF = 180°$ y $2m\angle EFC + m\angle EFA = 180°$

Ahora,

$$2m\angle CEF + m\angle AEF + 2m\angle EFC + m\angle EFA = 360°$$

$$2m\angle CEF + 2m\angle EFC = 270°$$

$$m\angle CEF + m\angle EFC = 135°$$

Así, $m\angle ECF = 45°$. Finalmente, $m\angle BCE + m\angle DCF = 90° - m\angle ECF = 45°$

10. Ana, Beatriz y Carlos van al mismo colegio, el cual tiene 793 estudiantes distribuidos en la totalidad de aulas de la institución. En el colegio se sabe que por cada 23 personas que se reúnen en los recreos, hay dos de la misma aula.
Ana afirma que hay por lo menos un aula en la que hay al menos 19 estudiantes del mismo género, Carlos dice que hay a lo sumo 19 y Beatriz dice que hay al menos 20. Se puede asegurar que

    (a) Ana tiene razón

    (b) Beatriz tiene razón

    (c) Carlos tiene razón

    (d) Ninguno tiene razón

- Opción correcta: (a)
- Solución:

  Como en cada grupo de 23 personas siempre hay 2 de la misma sección, eso significa que no puede haber más de 22 secciones.

  Ahora, como $793 = 36 \cdot 22 + 1$, se tiene que al menos una sección tendrá 37 estudiantes o más (no puede suceder que las 22 secciones tengan menos de 37).

  Como $37 = 18 \cdot 2 + 1$ significa que al menos hay 19 personas del mismo género y en, por lo menos, una misma sección.

  Por lo tanto, Ana tiene razón.

11. Se elige un entero n al azar, tal que $1000 \leq n \leq 9999$.
La probabilidad de que el producto de las cifras de n
sea múltiplo de 3 corresponde a

   (a) $\dfrac{118}{125}$

   (b) $\dfrac{107}{125}$

   (c) $\dfrac{18}{125}$

   (d) $\dfrac{7}{125}$

- Opción correcta: (b)
- Solución

  Vamos a calcular la probabilidad de que el producto de las cifras no sea múltiplo de 3, es decir, de que ninguna de las cifras sea múltiplo de 3.

  La probabilidad de que la cifra de los millares no sea múltiplo de 3 es igual a $\dfrac{6}{9}$ ya que hay seis elecciones $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ que no son múltiplos de 3 de nueve candidatos posibles.

  No obstante, para las cifras de las centenas, decenas y unidades la probabilidad se reduce a $\dfrac{6}{10}$ ya que también cabe la posibilidad de que tomen el valor 0.

  Como la elección de los distintos dígitos es independiente, la probabilidad de que el producto de las cifras no sea múltiplo de 3 es igual al producto de las probabilidades: $\dfrac{6}{9} \cdot \dfrac{6}{10} \cdot \dfrac{6}{10} \cdot \dfrac{6}{10} = \dfrac{18}{125}$.

  La probabilidad de que dicho producto sí sea múltiplo de 3 es la complementaria $1 - \dfrac{18}{125} = \dfrac{107}{125}$, que es el número buscado.

12. Si a, b y c son dígitos, la cantidad total de números múltiplos de seis de la forma $4a5bc$ corresponde a

   (a) 161

   (b) 163

   (c) 165

   (d) 167

- Opción correcta: (d)
- Solución:

  Note que c tiene que ser un número par, que $4+5=9$, y que del 0 al 9 hay 4 números de la forma $3k$, 3 de la forma $3k+1$ y otros 3 de la forma $3k+2$.

  Si c es 0 o 6, entonces $a+b=3k$ por lo que hay $2\cdot(4\cdot 4+2\cdot 3\cdot 3)=68$ opciones.

  Si c es 2 u 8, entonces $a+b=3k+1$ por lo que hay $2\cdot(3\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4)=66$ opciones.

  Si c es 4, entonces $a+b=3k+2$ por lo que hay $1\cdot(3\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4)=33$ opciones.

  En total, $68+66+33=167$ números múltiplos de seis de la forma indicada.

II Parte: Desarrollo **Valor 21 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. Verónica, Ana y Gabriela situadas en una ronda se divierten con el siguiente juego: una de ellas elige un número y lo dice en voz alta; la que está a su izquierda divide el número dicho entre su mayor divisor primo y dice el resultado en voz alta; la que está a su izquierda divide este último número entre su mayor divisor primo y dice el resultado en voz alta, y así sucesivamente. Ganará aquella que deba decir en voz alta el número 1, momento en que el juego termina.

   Ana eligió un número mayor que 50 y menor que 100 y ganó.

   Verónica eligió el número consecutivo posterior del que escogió Ana, y ¡Verónica también ganó!

   Determine todos los números que pudo haber elegido Ana.

- Solución:

  Para que Ana gane tendrá que mencionar un número que tenga 3 factores primos o 6 factores primos.
  Así, los números que cumplen dicha característica son:
  $52 = 2 \cdot 2 \cdot 13$, $63 = 3 \cdot 3 \cdot 7$, $64 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$, $68 = 2 \cdot 2 \cdot 17$, $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$, $75 = 3 \cdot 5 \cdot 5$, $76 = 2 \cdot 2 \cdot 19$, $78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$, $92 = 2 \cdot 2 \cdot 23$, $96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, $98 = 2 \cdot 7 \cdot 7$, $99 = 3 \cdot 3 \cdot 11$

  Como Verónica elige el siguiente número consecutivo y gana, entonces Ana tuvo que elegir 63, 75 o 98.

2. Determine todos los números naturales N de dos dígitos, tales que N equivale a siete veces la suma de sus dígitos.

Solución

Sean a y b los dígitos y N el número, tal que $N = ab$.

Utilizando notación desarrollada se tiene que $N = 10a + b$.

$$\begin{aligned} 10a + b &= 7\,(a + b) \\ 10a + b &= 7a + 7b \\ 3a &= 6b \\ a &= 2b \end{aligned}$$

Lo cual significa que a es un número par. Así:
Si $a = 2$, $b = 1$.
Si $a = 4$, $b = 2$.
Si $a = 6$, $b = 3$.
Si $a = 8$, $b = 4$.

Entonces los números que cumplen dicha característica son $21, 42, 63$ y 84

3. Las diagonales del cuadrilátero $ABCD$ se intersecan en P y se tiene que $AP = 5$, $BP = 6$, $CP = 10$, $DP = 8$ y $AB = 7$.

   Encuentre la razón entre el área del cuadrilátero $ABCD$ y el área del triángulo ABP.

   Solución

   Observe que $\triangle ABP$ y $\triangle BPC$ tienen la misma altura, así que la razón entre sus áreas es igual a la razón de sus bases.

   Entonces $\dfrac{(ABP)}{(BPC)} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2} \implies (BPC) = 2\,(ABP)$

   De igual manera

$$\frac{(ABP)}{(APD)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \implies (APD) = \frac{4}{3}\,(ABP)$$

   y

$$\frac{(APD)}{(DPC)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \implies (DPC) = 2\,(APD) = \frac{8}{3}\,(ABP)$$

   Así,

$$\begin{aligned} (ABCD) &= (ABP) + (BPC) + (APD) + (DPC) \\ &= (ABP) + 2\,(ABP) + \frac{4}{3}\,(ABP) + \frac{8}{3}\,(ABP) \\ &= 7\,(ABP) \\ \Rightarrow \frac{(ABCD)}{(ABP)} &= 7 \end{aligned}$$