XXVI OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

UCR-UNA-ITCR-UNED-MEP-MICIT

SEGUNDA ELIMINATORIA
NACIONAL

EXAMEN SEGUNDO NIVEL
SOLUCIONARIO

2014

I Parte: Selección Única

1. Si se consideran los números enteros del 1 al 2014 inclusive. Entonces la cantidad de estos números que son divisibles por 7 y 11 simultáneamente corresponde a

   (a) 25

   (b) 26

   (c) 27

   (d) 28

Solución

Como los números tienen que ser divisibles simultáneamente por 7 y 11, entonces deben ser divisibles por 77, y al realizar la división de $\dfrac{2014}{77} = 26 + \dfrac{12}{77}$, por lo que la cantidad de números solicitada es 26.

Respuesta correcta: Opción b.

2. En la Isla del Coco hay 13 camaleones rojos, 15 amarillos y 17 morados. Cuando se encuentran dos camaleones de colores distintos ambos cambian su color al tercero. Por ejemplo, si se encuentran un camaleón rojo y uno morado los dos se vuelven amarillos. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es siempre FALSA?

   (a) El número de camaleones rojos puede ser par.

   (b) Los 45 camaleones de la isla nunca serán del mismo color.

   (c) El número de camaleones amarillos puede exceder al número de camaleones morados.

   (d) En algún instante los camaleones de la isla pueden ser del mismo color.

Solución

Sean r, a, m el número de camaleones rojos, amarillos y morados de la isla en un determinado momento. Cuando se encuentren dos camaleones de distinto color dos de los números r, a, m disminuirán en 1 y el otro aumentará en 2, por lo que cualquiera de las diferencias $m - a$, $m - r$, $a - r$ permanecerá igual o variará en 3 después de cada encuentro. Si en algún momento todos los camaleones de la isla fueran del mismo color los números r, a, m serían $45, 0, 0$ en algún orden y las diferencias $m - a$, $m - r$, $a - r$ serían, en algún orden, $45, 45, 0$ que son múltiplos de 3 y como estas diferencias son inicialmente $2, 4, 2$ (al inicio $r = 13$, $a = 15$, $m = 17$) entonces como las restas se conservan o se varían de 3 en 3 no es posible llegar a $45, 45, 0$ y por tanto los camaleones de la isla nunca podrán ser del mismo color.

Respuesta correcta: Opción d.

3. La cantidad de números enteros positivos de tres cifras, cuyos dígitos son primos que suman 14 es

    (a) 3
    (b) 6
    (c) 8
    (d) 10

Solución

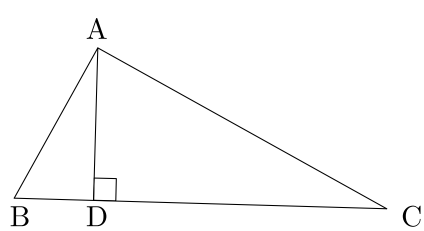
Un número menor que 1 000 tiene tres cifras. Por paridad una de las cifras es 2, esto porque la suma de tres primos mayores que 2 es impar. El 2 puede colocarse en tres posiciones distintas: en la cifra de las unidades, de las decenas o en las centenas. Las otras dos cifras son números primos que suman 12. Únicamente hay dos combinaciones que lo cumplen: 7 y 5, 5 y 7. Debido a que hay tres formas diferentes de colocar el 2 y dos combinaciones para los otros dos primos que suman 12, existen en total seis números menores que 1 000 cuyas cifras son números primos que suman 14. A continuación se indican todos estos números: 257, 275, 527, 723, 572, 752.

Respuesta correcta: Opción b.

4. Sea $\triangle ABC$ rectángulo en A y D el pie de la altura desde A. Si $AB = 5$ y $BD = 3$, entonces el área del $\triangle ADC$ corresponde a

    (a) $\dfrac{3}{4}$
    (b) $\dfrac{5}{3}$
    (c) 2
    (d) $\dfrac{32}{3}$

Solución



Por pitágoras $AD = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$

Sea $\angle ABD = \alpha \Rightarrow \angle BAD = 90 - \alpha \Rightarrow \angle DAC = \alpha \Rightarrow \angle ACD = 90 - \alpha$

Por aa $\triangle ADB \sim \triangle CDA \Rightarrow \dfrac{AD}{CD} = \dfrac{BD}{AD} \Rightarrow \dfrac{4}{CD} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow CD = \dfrac{16}{3}$

Así, $a(\triangle ADC) = \dfrac{CD \cdot AD}{2} = \dfrac{\frac{16}{3} \cdot 4}{2} = \dfrac{32}{3}$.

Respuesta correcta: Opción d.

5. El número de formas en que se pueden llenar las casillas de una cuadrícula de 2×6 con los números 1 y -1 de manera que la suma de los números en cada fila y cada columna sea 0 es

   (a) 10
   (b) 15
   (c) 18
   (d) 20

Solución

En la primera fila deben ser exactamente tres números 1 y tres números -1. Cuando se escriben los números de la primera fila en la casilla de abajo se escribe el opuesto para que se cumpla la condición, por lo que solo tenemos que contar el número de formas de acomodar 3 números en 6 casillas; es decir, $\binom{6}{3} = 20$ maneras distintas.

Respuesta correcta: Opción d.

6. Al factorizar la expresión $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ se obtiene que uno de sus factores es

   (a) $a^2 + b^2 + c^2$
   (b) $a - b + c$
   (c) $a + b + c$
   (d) $a + b - c$

Solución

Uno de los factores es $a + b + c$, ya que

$$\begin{aligned}
a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + c^3 - 3abc - 3a^2b - 3ab^2 \\
&= (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b+c) \\
&= (a+b+c)((a+b)^2 - c(a+b) + c^2) - 3ab(a+b+c) \\
&= (a+b+c)((a+b)^2 - c(a+b) + c^2 - 3ab) \\
&= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)
\end{aligned}$$

Respuesta correcta: Opción c.

7. Considere las ecuaciones $x^2 - 2013x - 2014 = 0$ y $x^2 + 2014x + 2013 = 0$ que tienen una solución en común, determine la suma de las dos soluciones diferentes.

   (a) 0
   (b) 1
   (c) -1
   (d) 4027

Solución

Al resolver la ecuación $x^2 - 2013x - 2014 = 0$ obtenemos las solución $x = 2014$ y $x = 1$. Ahora al resolver la ecuación $x^2 + 2014x + 2013 = 0$ obtenemos las soluciones $x = -2013$ y $x = 1$. Así la suma de las dos soluciones distintas da como resultado 1.

Respuesta correcta: Opción b.

8. Considere dos planos perpendiculares π_1, π_2 y l la recta intersección entre ellos.

   I. Sean $P_1 \in \pi_1, P_2 \in \pi_2$ tales que no estén en la recta l.
   II. Sean A, B puntos en l tales que $\overleftrightarrow{AP_1} \perp l$ y $\overleftrightarrow{BP_2} \perp l$.

   Si $P_1A = 1, P_2B = 2, P_1P_2 = 3$ entonces $\overline{AB}$ mide

   (a) 1
   (b) 2
   (c) $\sqrt{2}$
   (d) $\sqrt{3}$

Solución

Como $\pi_1 \perp \pi_2$, $\overleftrightarrow{AP_1} \perp \overleftrightarrow{AP_2}$, por lo que $\triangle AP_1P_2$ es recto en A. Por el Teorema de Pitágoras $AP_2 = \sqrt{(P_1P_2)^2 - (AP_1)^2} = \sqrt{8}$. Además $\triangle ABP_2$ es recto en B, por lo que $AB = \sqrt{(AP_2)^2 - (BP_2)^2} = \sqrt{8-4} = 2$.

Respuesta correcta: Opción b.

9. Sea N el número $4a73b$, en donde a y b son dígitos. ¿De cuántas maneras se pueden elegir a y b de tal forma que N sea divisible por 6?

   (a) 11
   (b) 16
   (c) 30
   (d) 50

Solución

Las cifras de N deben sumar un número que sea par (es decir b es par) y múltiplo de tres, así se tiene que $4+7+3=14$, entonces tenemos varios casos:

- $a+b$ sumen 1 tenemos sólo una forma.
- $a+b$ sumen 4 tenemos 3 formas.
- $a+b$ sumen 7 tenemos 3 formas.
- $a+b$ sumen 10 tenemos 4 formas.
- $a+b$ sumen 13 tenemos 3 formas.
- $a+b$ sumen 16 tenemos sólo una forma.

Así en total se pueden elegir de 16 formas distintas.

Respuesta correcta: Opción b.

10. Santiago y Gilbert están haciendo fresco de sirope con diferentes concentraciones en vasos de igual capacidad. El fresco de santiago tiene 3 partes de sirope por 7 de agua, mientras que el fresco de Gilbert tiene 3 partes de sirope por 5 de agua. Deciden revolverlo para hacer un solo fresco, entonces, ¿cuál es la relación entre las partes de sirope y las partes de agua en el fresco resultante?

   (a) 3 partes de sirope por 5 de agua.
   (b) 7 partes de sirope por 13 de agua.
   (c) 18 partes de sirope por 35 de agua.
   (d) 27 partes de sirope por 53 de agua.

Solución

El fresco de santiago tiene 3 partes sirope por 10 partes del total del refresco, el fresco del Gilbert tiene 3 partes de sirope por 8, así tenemos que en uniendo los dos vaso de agua la concentración de sirope corresponde a:

$$\frac{\frac{3}{10}+\frac{3}{8}}{2}=\frac{24+30}{80\cdot 2}=\frac{54}{160}=\frac{27}{80}$$

Es decir en el fresco resultante tendremos 27 partes de sirope por 53 de agua.

Respuesta correcta: Opción d.

11. Suponga que cuando un matrimonio va a tener un hijo es igualmente probable que sea varón a que sea mujer. Si una pareja desea tener tres hijos, uno por cada embarazo, entonces la probabilidad de que la pareja tenga dos niñas y un niño corresponde a

    (a) $\frac{1}{16}$
    (b) $\frac{1}{9}$
    (c) $\frac{1}{4}$
    (c) $\frac{3}{8}$

Solución

Si designamos con H a los niños y con M a las niñas, se tiene el siguiente espacio muestral: {MMM, MMH, MHH, MHM, HHM, HMH, HMM, HHH }, por lo que la probabilidad solicitada es de $P = \frac{3}{8}$.

Respuesta correcta: Opción d.

12. Considere un triángulo ABC con D un punto sobre el lado $\overline{BC}$ tal que $AC = CD$. Si $m\angle CAB - m\angle ABC = 30°$ entonces $m\angle BAD$ es

    (a) 15°
    (b) 20°
    (c) 10°
    (d) 25°

Solución

Sean D un punto sobre el lado $\overline{BC}$ del triángulo ABC y trace el segmento $\overline{AD}$.

$$\begin{aligned} m\angle BAD &= m\angle CAB - m\angle CAD \\ &= m\angle CAB - m\angle CDA \qquad \text{(por ser } AC = CD) \\ &= m\angle CAB - (m\angle BAD + m\angle ABD) \qquad \text{(teorema ángulo externo en el } \triangle\, ADB) \\ &= m\angle CAB - m\angle BAD - m\angle ABC \end{aligned}$$

Por tanto, $2(m\angle BAD) = m\angle CAB - m\angle ABC = 30°$ y entonces $m\angle BAD = 15°$.

Respuesta correcta: Opción a.

II Parte: Desarrollo

Instrucciones. Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste los ejercicios en forma ordenada, completa y clara, se califica procedimiento y respuesta.

1. Dado un $\triangle ABC$ rectángulo en C, tal que la altura sobre la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos tal que uno de ellos es dos unidades menor que la altura y el otro es tres unidades mayor que la altura. Calcule la longitud del cateto mayor del $\triangle ABC$.

Solución

Si se designa con x la longitud de la altura sobre la hipotenusa del $\triangle ABC$ entonces,
$x^2 = (x-2)(x+3) \quad \Rightarrow \quad x^2 = x^2 + x - 6 \quad \Rightarrow \quad x = 6.$

Si se denota con D la intersección de la altura sobre la hipotenusa del $\triangle ABC$ y la hipotenusa, entonces los triángulos $\triangle CDB$ y $\triangle CAD$ son rectángulos que comparten un cateto, sin pérdida de generalidad se puede asumir que $AD = 6 + 3 = 9$ y $AB = 6 - 2 = 4$, por lo que el cateto AC del $\triangle ABC$ es el cateto mayor del $\triangle ABC$.
Aplicando el Teorema de Pitágoras en el $\triangle CAD$ se tiene,
$(AC)^2 = (CD)^2 + (AD)^2 \Rightarrow AC = \sqrt{6^2 + 9^2} = 3\sqrt{13}.$

2. Sea abc un número donde a, b, c son cifras tal que su suma da 18, la cifra de las unidades es el doble de las decenas y la diferencia de los números abc y cba es 297. Determine el número abc.

Solución

Sabemos que $a + b + c = 18$, $c = 2b$, $abc - cba = 297$. Además, $a > c$ pues la resta es positiva.

Luego $c + 10 - a = 7 \quad \Rightarrow \quad a = c + 3 \quad \Rightarrow \quad a = 2b + 3.$

Tenemos que $a + b + c = 18 \Rightarrow (2b+3) + b + (2b) = 18 \quad \Rightarrow 5b = 15 \Rightarrow b = \dfrac{15}{5} = 3$

$\Rightarrow c = 2 \cdot 3 = 6$ y $a = 2 \cdot 3 + 3 = 9$

Por lo tanto, el número es 936.

3. Encuentre la solución del siguiente sistema en donde x, y, z son números reales positivos.

$$\begin{cases} x^2 + xy + xz = 26 \\ xy + y^2 + yz = 27 \\ xz + yz + z^2 = 28 \end{cases}$$

Solución

Sumando miembro a miembro

$$\begin{gathered} x(x+y+z) + y(x+y+z) + z(x+y+z) = 26 + 27 + 28 \\ (x+y+z)(x+y+z) = 81 \\ (x+y+z)^2 = 81 \\ \sqrt{(x+y+z)^2} = \sqrt{81} \\ |x+y+z| = 9 \\ x+y+z = 9 \\ x = \frac{26}{9},\ y = \frac{27}{9} = 3,\ z = \frac{28}{9} \end{gathered}$$

XXVII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

UNA - UCR - TEC - UNED - MEP - MICIT

SOLUCIÓN II ELIMINATORIA NACIONAL

II Nivel

$(8^{\circ} - 9^{\circ})$

2015

I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 pts c/u**

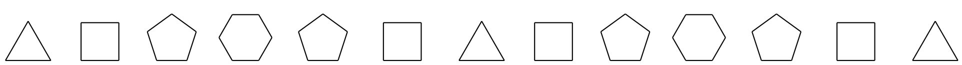
1. Si $(3x+2-b)\,(3x+2+b) \;=\; (3x-2+a)\,(3x-2-a)$ y $a+b=4x$ con $x>0$, el valor numérico de $b-a$ corresponde a

   (a) 2
   (b) 6
   (c) 8
   (d) 10

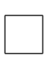
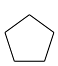
   - Opción correcta: b)
   - Solución:

$$\begin{aligned}(3x+2-b)(3x+2+b) &= (3x-2+a)(3x-2-a)\\ (3x+2)^2-b^2 &= (3x-2)^2-a^2\\ 24x &= b^2-a^2\\ 24x &= (b+a)(b-a)\\ 24x &= 4x(b-a)\\ 6 &= b-a\end{aligned}$$

2. Rolando dibuja una serie de figuras:



   Si continúa de la misma forma, la figura que estará en la posición 2015 será

   (a) 
   (b) 
   (c) 
   (d) 

   - Opción correcta: c)
   - Solución: Observe que hay un:
     Triángulo en las posiciones $1,7,13,...,1+6k$
     Cuadrado en las posiciones $2,8,14,...,2+6k$ y $6,12,18,...,0+6k$
     Pentágono en las posiciones $3,9,15,...,3+6k$ y $5,11,17,...,5+6k$
     Hexágono en las posiciones $4,10,16,...,4+6k$

     Como $2015 = 5 + 335\cdot 6$, entonces en la posición 2015 habrá un pentágono.

3. El mayor entero que siempre divide a la expresión $\left(2n^3 - 2n\right)^2$, con n entero, corresponde a

   (a) 4
   (b) 12
   (c) 36
   (d) 144

   - Opción correcta: d)
   - Solución:

$$\begin{aligned}\left(2n^3 - 2n\right)^2 &= \left[2n\left(n^2 - 1\right)\right]^2\\ &= \left[2n\left(n-1\right)\left(n+1\right)\right]^2\\ &= 2^2\left[n\left(n-1\right)\left(n+1\right)\right]^2\\ &= 4\left[n\left(n-1\right)\left(n+1\right)\right]^2\end{aligned}$$

Como $(n-1)\,n\,(n+1)$ es divisible por $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \Rightarrow 6 \,|\, (n-1)\,n\,(n+1) \Rightarrow (n-1)\,n\,(n+1) = 6k$ con k entero.

Así,

$$\begin{aligned}\left(2n^3 - 2n\right)^2 &= 4\left[n\left(n-1\right)\left(n+1\right)\right]^2\\ &= 4\left[6k\right]^2\\ &= 4 \cdot 6^2 \cdot k^2\\ &= 144k^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, 144 divide a $\left(2n^3 - 2n\right)^2$.

4. Cinco amigas Ana, Berta, Carla, Diana y Eva construyen una mesa redonda con cinco asientos a su alrededor, rotulados con sus iniciales (A, B, C, D y E, respectivamente). La primera vez que se reúnen en esa mesa cada una se sienta sobre su inicial y deciden que cada vez que se vuelvan a sentar juntas irán rotando las posiciones donde estarán sentadas; es decir, la próxima vez que se encuentren Ana se sentará sobre la B, Berta en sobre C y así sucesivamente. ¿Dónde se sentará Eva cuando se hayan reunido 147 veces?

   (a) En A
   (b) En B
   (c) En D
   (d) En E

   - Opción correcta: a)

- Solución:
  Cada persona está sobre su inicial las veces : $1^{ra}, 6^{ta}, 11^{va}, \cdots$ que se vean, es decir de la forma $5n+1$ y $n+1$ corresponde a las veces que estarán sobre su inicial.
  Como $146 = 5 \times 29 + 1$ se tiene que cuando se vean 146 veces estarán cada una en su lugar.
  Por lo tanto cuando se han reunido 147 veces Eva se sentará sobre la A.

5. La cantidad de enteros positivos n que hacen que la expresión $(n-3)\left(n^2 - 13n + 41\right)$ sea un número primo es

   (a) 1
   (b) 3
   (c) 4
   (d) 6

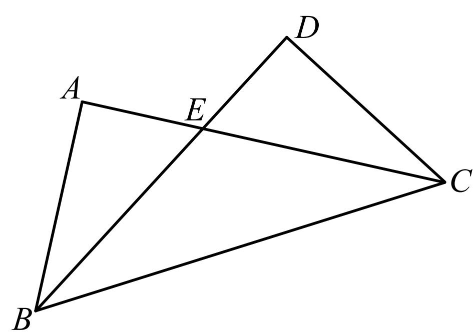
- Opción correcta: $b)$
- Solución:
  Dado que la expresión $(n-3)(n^2-13n+41)$ ya está factorizada al máximo en $\mathbb{N}$, se tiene que para que sea un número primo uno de sus factores debe ser 1 y el otro un número primo.

  $n-3 = 1 \Rightarrow n = 4$, sustituyendo $n = 4$ en $n^2 - 13n + 41$ se obtiene $4^2 - 13 \cdot 4 + 41 = 5$ el cual es primo. Por lo tanto $n = 4$ es uno de los enteros que cumplen el enunciado.

  $n^2 - 13n + 41 = 1 \Rightarrow n^2 - 13n + 40 = 0 \Rightarrow (n-8)(n-5) = 0 \Rightarrow n = 8 \ \vee \ n = 5.$
  $n = 8 \Rightarrow n - 3 = 5$ el cual es primo.
  $n = 5 \Rightarrow n - 3 = 2$ el cual también es primo.
  Así, 8 y 5 cumplen el enunciado.
  Por lo tanto $(n-3)(n^2-13n+41)$ es un número primo para $n \in \{4, 5, 8\}$.

6. En la figura adjunta los triángulos ΔABC y ΔDCB son triángulos rectángulos rectos en A y D, respectivamente. Si $\Delta ABC \cong \Delta DCB$, $BC = 12$ cm y $m\angle ACB = 30°$, el área del ΔBEC en cm^2 es

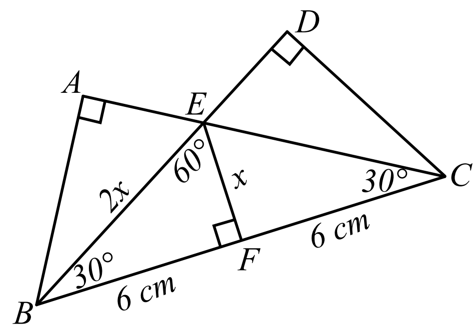
   (a) $6\sqrt{3}$
   (b) $8\sqrt{3}$
   (c) $9\sqrt{3}$
   (d) $12\sqrt{3}$



- Opción correcta: $d)$

- Solución:

  Dado que los triángulos ΔABC y ΔDCB son triángulos rectángulos y congruentes, ambos son $30° - 60° - 90°$. En la figura se muestran detalles asociados con las medidas de algunos de los ángulos y lados de los triángulos.



  El ΔBCE es isósceles, pues en este se tiene que $m\angle BCE = m\angle CBE = 30°$, por la congruencia de los triángulos ΔABC y ΔDCB y el hecho que $m\angle ACB = 30°$. Luego, en el ΔBCE la altura $\overline{EF}$ es también mediatriz, por lo que $BF = FC = \dfrac{BC}{2} = 6$ cm.

  Si $x = EF$, con base en el Teorema de Pitágoras se tiene que

$$\begin{aligned} & (2x)^2 - x^2 = 36 \\ \Rightarrow\ & 4x^2 - x^2 = 36 \\ \Rightarrow\ & 3x^2 = 36 \\ \Rightarrow\ & x^2 = 12 \\ \Rightarrow\ & x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

  El área del ΔBEC es $\dfrac{BC \cdot EF}{2} = \dfrac{12 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$.

7. Tres estudiantes se organizan para comprarle un regalo a su profesor y deciden aportar semanalmente de la siguiente manera: Mario dará tres veces más que Roberto y la mitad de lo que dará Carlos. A las cinco semanas Carlos se retira mientras los otros dos siguen aportando lo pactado y reúnen el dinero en ocho semanas más. Si el regalo cuesta 15 750 colones, ¿cuánto dinero, en colones, aportó Roberto?

   (a) 1 150
   (b) 1 500
   (c) 1 950
   (d) 2 000

- Opción correcta: $c)$
- Solución:

Nombre	Aporte semanal	5 semanas	8 semanas
Carlos	$2(4x) = 8x$	$40x$	-
Mario	$3x + x = 4x$	$20x$	$32x$
Roberto	x	$5x$	$8x$
Total		$65x$	$40x$

Por lo tanto $105x = 15\,750$, y $x = 150$, entonces Roberto aportó $13x = 13 \times 150 = 1\,950$.

8. En un juego entre tres personas cuando una pierde debe dar a cada una de las otras tanto dinero como tenga esa persona. Se juegan tres partidas y pierden una partida cada una de ellas. Al terminar el juego cada persona tiene 24 monedas. ¿Con cuántas monedas empezó a jugar la persona que perdió la primera partida?

   (a) 12
   (b) 24
   (c) 39
   (d) 48

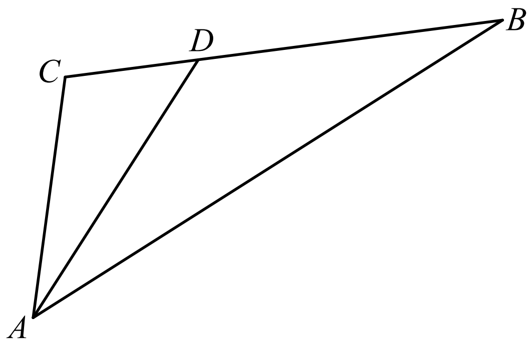
   - Opción correcta: c)
   - Solución:
     Es posible construir una tabla comenzando por la situación del final de la partida, y terminar en la del comienzo. Llamemos A, B y C a cada uno de los jugadores.

		A	B	C
Final:	Ha perdido C	24	24	24
	Ha perdido B	12	12	48
	Ha perdido A	6	42	24
Comienzo:		39	21	12

Por tanto, el jugador que pierde la primera partida comenzó con 39 monedas, el que pierde la segunda con 21 monedas y el otro con 12 monedas.

9. En el ΔABC de la figura adjunta, $\overline{AD}$ es la bisectriz del $\angle BAC$ y $m\angle BAC = 2 \cdot m\angle ABC$. Si $c = AB$, $b = AC$ y $a = BC$, una expresión equivalente a $a^2 - b^2$ es

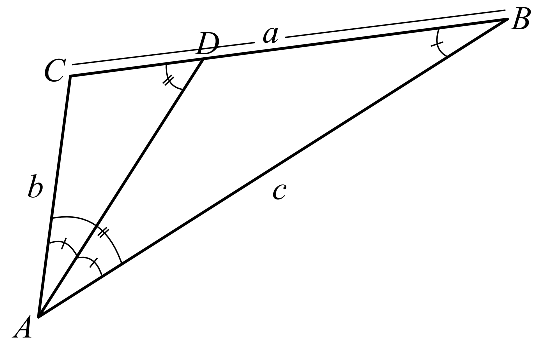
   (a) ac
   (b) bc
   (c) $a + bc$
   (d) $b + ac$



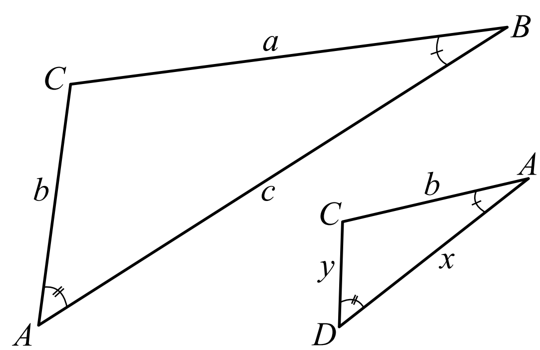
- Opción correcta: $b)$
- Solución:

  Como $m\angle BAC = 2m\angle ABC$, se tiene que $\angle ABC \cong \angle DAB$, por lo que el ΔADB es isósceles.

  Por otra parte, $m\angle ADC = m\angle DAB + m\angle DBA = 2 \cdot m\angle ABC = m\angle BAC$.



Observando los ángulos formados en la figura anterior, se tiene que $\Delta ABC \sim \Delta DAC$.



Por semejanza de triángulos, se satisface que

$$\begin{aligned} \frac{x}{c} &= \frac{b}{a} \\ \Rightarrow \quad x &= \frac{bc}{a} \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \frac{y}{b} &= \frac{b}{a} \\ \Rightarrow \quad y &= \frac{b^2}{a} \end{aligned}$$

Luego, en el ΔABC se tiene que el ΔADB es isósceles, por lo que

$$\begin{aligned} & DA = DB \\ \Rightarrow \quad & x = a - y \\ \Rightarrow \quad & \frac{bc}{a} = a - \frac{b^2}{a} \\ \Rightarrow \quad & bc = a^2 - b^2 \end{aligned}$$

10. La tabla

50	b	c
d	e	f
g	h	2

es un cuadrado mágico multiplicativo. Esto es, el producto de los números en cada fila, columna y diagonal es el mismo. Si todas las entradas del cuadrado son enteros positivos, la suma de los posibles valores de g es

(a) 10
(b) 25
(c) 35
(d) 62

- Opción correcta: c)
- Solución:
  Veamos que $100e = beh = ceg = def$, de aquí se obtiene que $h = \frac{100}{b}$, $g = \frac{100}{c}$ y $f = \frac{100}{d}$.

  Comparando las filas 1 y 3 se tiene que $50bc = 2\dfrac{100}{b}\dfrac{100}{c}$, de lo cual $c = \dfrac{20}{b}$.

  Entonces el producto de las entradas de la primera fila es $1\,000$, y así $1\,000 = 100e$, y $e = 10$.

  Ahora comparando las columnas 1 y 3 se observa que $50d\dfrac{100}{c} = 2c\dfrac{100}{d}$ para obtener $d = \dfrac{c}{5} = \dfrac{4}{b}$.

  Finalmente, $f = \dfrac{100}{d} = 25b$, $g = \dfrac{100}{c} = 5b$ y $e = 10$.
  Todas las entradas serán enteras si y solo si $b = 1$, 2 o 4, y los correspondientes valores de g serán 5, 10 y 20, con su suma 35.

11. Sea n el menor entero positivo tal que cada dígito de $6n$ es 5 o 2, entonces la suma de los dígitos de n corresponde a

(a) 6
(b) 8
(c) 10
(d) 15

- Opción correcta: c)
- Solución:
  El número $6n$ es múltiplo de 2, por lo tanto es par; quiere decir que debe terminar en 2, pero también es múltiplo de 3 entonces la suma de sus dígitos es múltiplo de 3, (se podría pensar en 522 o 252 por ejemplo) pero como n es el menor, $6n = 222$, por tanto $n = 37$ y la suma de sus dígitos es 10.

12. Hay que colocar aleatoriamente a 3 hombres y 2 mujeres en una fila; la probabilidad de que las mujeres ocupen los lugares pares es

   (a) $\frac{2}{5}$

   (b) $\frac{2}{3}$

   (c) $\frac{1}{10}$

   (d) $\frac{1}{60}$

   - Opción correcta: c)
   - Solución:

     Hay 120 maneras de colocar 5 personas en una fila, ya que la primera posición puede ser ocupada por 5 personas, la segunda por 4, y así sucesivamente.

     Para que las mujeres queden en posiciones pares hay 2 formas para ellas y 6 para los varones, por tanto serán 12 maneras.

     Entonces la probabilidad es $\frac{12}{120} = \frac{1}{10}$.

II Parte: Desarrollo **Valor 21 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. Determine la cantidad de números con 152 cifras de la forma $3a3aa3aaa3aaaa\ldots$ que son divisibles por 9 .

   Solución Si n es la cantidad de 3 que contiene el número entonces la cantidad de dígitos iguales a a está dada por $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

   Dado que el número tiene 152 cifras se cumple que $n+\dfrac{n(n+1)}{2}=152 \Rightarrow n^2+3n-304=0 \Rightarrow (n+19)(n-16)=0 \Rightarrow n=-19 \vee n=16$. Dado que $n>0$ se tiene que $n=16$. Esto significa que de las 152 cifras, 16 son iguales a 3 y 136 iguales a a.

   Un número es divisible por 9 si la suma de sus crifras es divisible por 9, debido a esto $16\cdot 3+136a=8(6+17a)$ debe ser divisible por 9, o bien $6+17a$ debe ser divisible de 9. Veamos:

   - $a=0 \Rightarrow 6+17a=6 \ \wedge \ 9 \nmid 6$.
   - $a=1 \Rightarrow 6+17a=23 \ \wedge \ 9 \nmid 23$.
   - $a=2 \Rightarrow 6+17a=40 \ \wedge \ 9 \nmid 40$.
   - $a=3 \Rightarrow 6+17a=57 \ \wedge \ 9 \nmid 57$.
   - $a=4 \Rightarrow 6+17a=74 \ \wedge \ 9 \nmid 74$.
   - $a=5 \Rightarrow 6+17a=91 \ \wedge \ 9 \nmid 91$.
   - $a=6 \Rightarrow 6+17a=108 \ \wedge \ 9 \mid 108$.
   - $a=7 \Rightarrow 6+17a=125 \ \wedge \ 9 \nmid 125$.
   - $a=8 \Rightarrow 6+17a=142 \ \wedge \ 9 \nmid 142$.
   - $a=9 \Rightarrow 6+17a=159 \ \wedge \ 9 \nmid 159$.

   Por lo tanto, a solo puede tomar un valor que corresponde a 6.

2. Mar y Tina tienen un tablero como el de ajedrez (o sea, con ocho columnas y filas, formando 64 cuadritos alternadamente pintados de blanco y negro). Cada fila y columna está enumerada, en orden, con un número del uno al ocho, donde el cuadrito correspondiente a la fila 1 y columna 1 es negro, y el correspondiente a la fila 8 y columna 8 es negro también.

   En cada cuadrito hay fichas en forma de calamar. El número de fichas que hay en cada uno es igual al producto del número de la fila por el número de la columna. Por ejemplo, en el cuadrito de la fila 6 y columna 5 hay 30 fichas.

   Mar dice que hay más fichas en los cuadritos negros, mientras que Tina dice que hay más en los cuadritos blancos. Su amigo, Justino, dice que hay igual en ambas. Determine quién tiene la razón y encuentre, exactamente, cuántas fichas hay en los cuadritos negros y cuántas en los blancos.

Solución

Denotemos el cuadrito de la fila i y la columna j como (i, j).

Contemos primero cuántas fichas hay en los cuadritos negros. Analicemos la primer fila:

Como $(1, 1)$ es negro, también lo serán $(1, 3), (1, 5), (1, 7)$. De manera análoga, cuando estemos en la fila i, para i impar, tendremos que $(i, 1), (i, 3), (i, 5), (i, 7)$ serán negros. La suma de fichas, en estas filas, sería igual a

$$1\cdot(1+3+5+7)+3\cdot(1+3+5+7)+5\cdot(1+3+5+7)+7\cdot(1+3+5+7) = (1+3+5+7)^2 = 16^2.$$

Ahora bien, en la segunda fila, los cuadritos negros serán $(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8)$. Similarmente, para la fila i, con i par, $(i, 2), (i, 4), (i, 6), (i, 8)$ serán negros. La suma de fichas, en estas filas, sería igual a

$$2\cdot(2+4+6+8)+4\cdot(2+4+6+8)+6\cdot(2+4+6+8)+8\cdot(2+4+6+8) = (2+4+6+8)^2 = 20^2.$$

En total hay $16^2 + 20^2 = 256 + 400 = 656$ fichas en cuadritos negros.

Una forma de determinar cuántas hay en los cuadritos blancos es calcular el total y restarle las negras.

En total, el número de fichas es

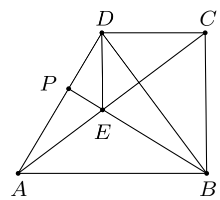
$$1 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 8) + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 8) + \cdots + 8 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 8) =$$
$$(1 + 2 + 3 + \cdots + 8)^2 = ((8 \cdot 9))^2 /4 = 1296.$$

Por lo tanto, hay $1296 - 656 = 640$ fichas blancas. O sea, Mar tenía razón sobre Tina y Justino.

3. Se tiene un triángulo rectángulo ΔABC, recto en B. Sea H el pie de la altura desde B hasta $\overline{AC}$. Una paralela a $\overline{AB}$ a través del punto C corta a $\overleftrightarrow{BH}$ en el punto D. Una paralela a $\overline{BC}$ a través del punto D corta a $\overleftrightarrow{AC}$ en E. Sea P el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AD}$ con $\overleftrightarrow{BE}$. Determine la medida del $\angle APB$.

Solución

Considere la siguiente figura



Como la suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$, en un tringulo rectángulo se tiene que la suma de los ángulos agudos es $90°$. Por lo tanto, se puede ver que

$$m\angle HAB = 90° - m\angle HBA = m\angle HBC = m\angle HCD = m\angle HDE$$

De modo que $\angle HAB \cong \angle HDE$, y por tener dos ángulos congruentes entonces $\triangle HAB \sim \triangle HDE$.

De la semejanza se tiene que

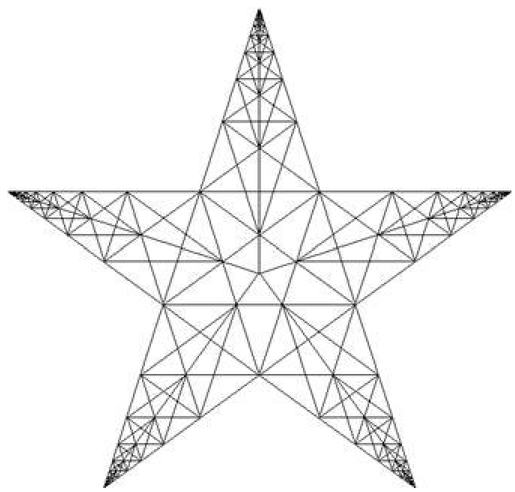
$$\frac{HA}{HB} = \frac{HD}{HE} \text{ y } \frac{HA}{HD} = \frac{HB}{HE},$$

Por lo tanto $\triangle HAD \sim \triangle HBE$ y se tiene que $m\angle HAD = m\angle HBE$. Comparando los ángulos en los triángulos ΔAPE y ΔBHE, que resultan semejantes, se tiene que $m\angle APE = m\angle BHE = 90°$.

XXVIII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

UNA - UCR - TEC - UNED - MEP - MICITT

SOLUCIÓN
SEGUNDA ELIMINATORIA NACIONAL



II Nivel

$8^\circ - 9^\circ$

2016

Estimado estudiante:

La Comisión Organizadora de las Olimpiadas Costarricenses de Matemática le saluda y felicita por haber clasificado a la segunda eliminatoria nacional de estas justas académicas. La prueba consta de dos partes: una primera parte de 12 preguntas de selección única, ponderadas con dos puntos cada respuesta correcta, y una segunda parte con 3 preguntas de desarrollo, con un valor de 7 puntos cada solución correcta.

Los resultados de esta eliminatoria se publicarán a partir del viernes 30 de setiembre, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 pts c/u**

1. Un reloj se adelante 5 minutos cada hora. Si se sincroniza a las 2:00 pm con otro que marca la hora de forma correcta, entonces la hora que marcará el reloj defectuoso cuando el bueno marque las 5:00 am del día siguiente es

   (a) 3:35 am
   (b) 3:45 am
   (c) 6:15 am
   (d) 6:25 am

- Opción correcta: (c)
- Solución:

  Cuando el reloj que funciona correctamente marque las 5:00 am del día siguiente habrá transcurrido 15 horas. Dado que el el reloj defectuoso se adelanta 5 minutos cada hora, se tendrá entonces que para las 5:00 am habrá adelantado $15 \cdot 5 = 75$ minutos, es decir, 1 hora con 15 minutos. Por lo tanto la hora que marcará el reloj defectuoso será 6:15 am.

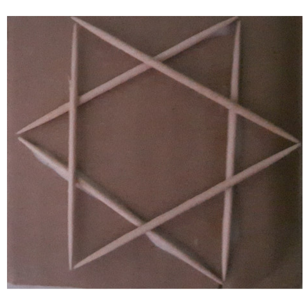
2. El mayor número de triángulos equiláteros que se pueden construir con seis fósforos iguales es

   (a) 2
   (b) 3
   (c) 4
   (d) 5

- Opción correcta: Ninguna.
- Solución:

  Si los fósforos no se pueden intersecar, el mayor número de triángulos es 4, considerando una pirámide en tres dimensiones.

  Sin ambargo, dado que en el enunciado no se restringe a que los fósforos no se pueden intersecar, se podrían tener figuras como la siguiente, con más triángulos equiláteros.



3. Un cubo con todas sus caras pintadas es dividido en 1000 cubos más pequeños de iguales dimensiones. Si los 1000 cubos pequeños son depositados en una urna, la probabilidad de seleccionar al azar un cubo pequeño que posea solo dos caras pintadas es

   (a) $\dfrac{1}{10}$

   (b) $\dfrac{12}{125}$

   (c) $\dfrac{13}{125}$

   (d) $\dfrac{281}{500}$

- Opción correcta: c)
- Solución:

  Al separar el cubo original en 1 000 cubos de iguales dimensiones se está realizando una división de cada cara de este cubo original en diez filas y diez columnas.

  Los cubos en los que hay que enfocarse son aquellos cubos que pertenecen a alguna de las caras (hay cubos que surgen de la parte interna del cubo original que no poseen caras pintadas).

  De los cubos que están pintados, los que poseen dos caras pintadas son cubos que pertenecen a alguna de las doce aristas del cubo original pero que no pertenecen a los vértices de dicho cubo original (note que de los vértices del cubo original surgen ocho pequeños cubos que poseen tres caras pintadas).

  Luego, la cantidad de cubos pequeños que poseen solo dos caras pintadas surge de la cantidad de cubos pequeños que originalmente estuvieron en alguna arista pero no en algún vértice.

  Cada una de las doce aristas posee ocho cubos que no están en algún vértice; por lo que $8 \cdot 12 = 96$ es la cantidad de cubos pequeños que poseen solo dos caras pintadas. Como en total hay 1 000 cubos, la probabilidad de extraer un cubo pequeño de la urna con solo dos caras pintadas es $\dfrac{96}{1\,000} = \dfrac{12}{125}$.

4. El producto de las edades de un padre y su hijo es 1856. Hace seis años la edad del hijo era igual a la edad del padre cuando el hijo nació. La edad del padre es

   (a) 29

   (b) 32

   (c) 58

   (d) 64

- Opción correcta: c)

- Solución:

  Sean a la edad del hijo y b la edad del padre, cuando el hijo nació la edad del padre era $a-6$, como la diferencia de edades es constante, entonces $b-a=a-6-0$
  $\Rightarrow b=2a-6$.
  Ahora como $a\cdot b=1856$ entonces
  $a(2a-6)=1856$
  $2a^2-6a-1856=0$
  $a=32$
  Y así la edad del padre es 58 años.

5. La cantidad de duplas de la forma (a,b), con $a,b\in\mathbb{N}$ que cumplen que $\dfrac{a^{-1}+b}{a+b^{-1}}=12$ y $a+b\leq 120$ es

   (a) 5
   (b) 9
   (c) 10
   (d) 20

- Opción correcta: (b)

- Solución

  $\dfrac{a^{-1}+b}{a+b^{-1}}=\dfrac{\frac{1}{a}+b}{a+\frac{1}{b}}=\dfrac{\frac{1+ab}{a}}{\frac{ab+1}{b}}=\dfrac{b}{a}=12\Rightarrow b=12a$. Dado que $a+b\leq 120$ se tiene que $13a\leq 120$.
  Luego $a\leq 9$. Pero $a\neq 0$ por lo tanto $1\leq a\leq 9$. Para cada valor de a hay un valor respectivo para b. En total hay 9 parejas de números: $(1,12),(2,24),(3,36),...,(9,108)$.

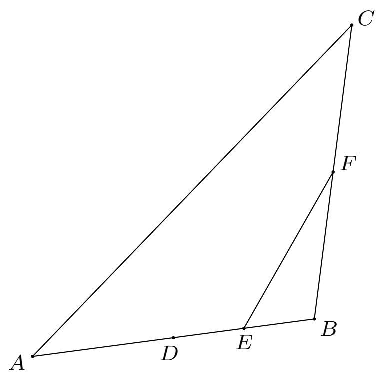
6. En un $\triangle ABC$, D es el punto medio de $\overline{AB}$, E es el punto medio de $\overline{DB}$ y F es el punto medio de $\overline{BC}$. Si el área del $\triangle ABC$ es 96, entonces el área del $\square AEFC$ es

   (a) 12
   (b) 24
   (c) 48
   (d) 84

- Opción correcta: d)

- Solución:

  Sea h la medida de la altura del $\triangle ABC$ correspondiente con C. Dado que F es el punto medio de $\overline{BC}$, la medida de la altura del $\triangle EBF$ trazada desde F, h_1, satisface: $h_1=\dfrac{h}{2}$.



Además, la base $\overline{EB}$ del $\triangle EBF$ es la cuarta parte de la medida de la base $\overline{AB}$ del $\triangle ABC$.

De acuerdo con el enunciado, el área del $\triangle ABC = 96 = \dfrac{AB \cdot h}{2}$. Usando este resultado se tiene que el área del $\triangle EBF = \dfrac{EB \cdot h_1}{2} = \dfrac{\frac{AB}{4} \cdot \frac{h}{2}}{2} = \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{AB \cdot h}{2} = \dfrac{1}{8} \cdot (ABC) = \dfrac{1}{8} \cdot 96 = 12.$

Por lo tanto, $(AEFC) = 96 - 12 = 84$.

7. Considere la ecuación cuadrática $x^2 - px + q = 0$, donde p, q son números primos. Si se sabe que existen dos soluciones enteras positivas diferentes, entonces el valor de $p^2 + q^2$ es

   (a) 5
   (b) 13
   (c) 29
   (d) 34

- Opción correcta: b)
- Solución:

  El lado izquierdo se puede factorizar $(x - a)(x - b)$, donde a y b son las dos soluciones enteras. Por lo tanto, se debe cumplir que $ab = q$, por lo que al ser q primo, una de las raíces debe ser 1 y la otra q. Luego, $p = a + b = q + 1$, por lo que p y q son primos consecutivos. Así, $p = 3$ y $q = 2$. Por lo tanto $p^2 + q^2 = 13$

8. Manuel y Teresa tienen menos de cien años cada uno. Si se escriben las edades juntas se obtiene un número de cuatro dígitos que es un cuadrado perfecto y si a ese número se le suma 1313 se obtiene otro cuadrado perfecto. La suma de las edades de Manuel y Teresa corresponde a

   (a) 44
   (b) 55

(c) 57
(d) 81

- Opción correcta: *b*)
- Solución:

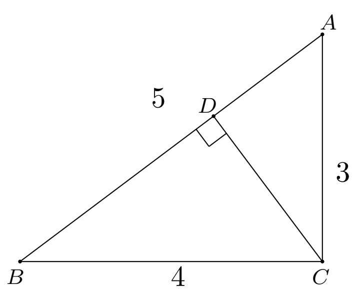
  Sean ab y cd las edades de Manuel y Teresa. Entonces $abcd$ es un cuadrado perfecto; es decir, $abcd = x^2$. Además, se sabe que $abcd + 1313 = y^2$. Así $x^2 + 1313 = y^2$
  $\Rightarrow y^2 - x^2 = 1313 \Rightarrow (y+x)(y-x) = 1313$. Ahora como 1313 es producto de los primos 13 y 101, entonces $y - x = 13$ y $y + x = 101$ de donde $x = 44$ y $y = 57$. Como $x^2 = 1936$, las edades de Manuel y Teresa son respectivamente 19 y 36. Por lo tanto la suma de las edades es 55.

9. Sea el $\triangle ABC$ tal que $AB = 5, BC = 4, AC = 3$. Si $\overline{CD}$ es una altura, entonces $\dfrac{(ADC)}{(BDC)}$ es

(a) $\dfrac{9}{25}$
(b) $\dfrac{16}{25}$
(c) $\dfrac{9}{16}$
(d) $\dfrac{16}{9}$

- Opción correcta: *c*)
- Solución:

  $(ABC) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$



$$\triangle ABC \sim \triangle CBD \Rightarrow \left(\frac{AB}{CB}\right)^2 = \frac{(ABC)}{(BDC)} \Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right) = \frac{6}{(BDC)} \Rightarrow (BDC) = \frac{96}{25}$$

De forma análoga

$$\triangle ABC \sim \triangle ADC \Rightarrow \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{(ABC)}{(ADC)} \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{6}{(ADC)} \Rightarrow (ADC) = \frac{54}{25}$$

Así tenemos $\dfrac{(ADC)}{(BDC)} = \dfrac{\frac{54}{25}}{\frac{96}{25}} = \dfrac{54}{96} = \dfrac{9}{16}$

10. La edad promedio de un grupo de administradores y de psicólogos es 40 años. Si el promedio de edad de los administradores es 35 años y la de los psicólogos es 50 años, entonces la razón del número de psicólogos con respecto al número de administradores es
    (a) 1 : 2
    (b) 2 : 1
    (c) 2 : 3
    (d) 3 : 2

- Opción correcta: a)
- Solución:

  Si a y p representan las cantidades de administradores y de psicólogos, respectivamente, entonces se busca el valor de $\frac{p}{a}$.

  De acuerdo con lo enunciado se satisface que:

$$\begin{aligned}\frac{35a+50p}{a+p}=40 \quad &\Rightarrow \quad 35a+50p=40\,(a+p)\\ &\Rightarrow \quad 35a+50p=40a+40p\\ &\Rightarrow \quad 50p-40p=40a-35a\\ &\Rightarrow \quad 10p=5a\\ &\Rightarrow \quad \frac{p}{a}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

11. Si 117^m posee 45 divisores, entonces el valor de m es
    (a) 2
    (b) 3
    (c) 4
    (d) 5

- Opción correcta: c)
- Solución:

  $x=117^m=\left(3^2\cdot 13\right)^m=3^{2m}\cdot 13^m$

  Con lo anterior, los divisores de $x=117^m$ son números de la forma $3^\alpha\cdot 13^\beta$, con α y β enteros, tales que $0\leq\alpha\leq 2m$ y $0\leq\beta\leq m$.

  Como x possee 45 divisores, se tiene que $45=(2m+1)\,(m+1)\Rightarrow 2m^2+3m-44=0\Rightarrow m=4$ o $m=\frac{-11}{2}$.

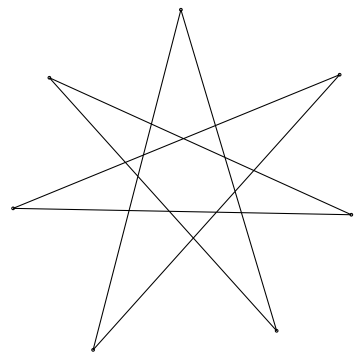
12. La suma de las medidas de los ángulos de las siete puntas de la estrella adjunta es

    (a) 90°

    (b) 180°

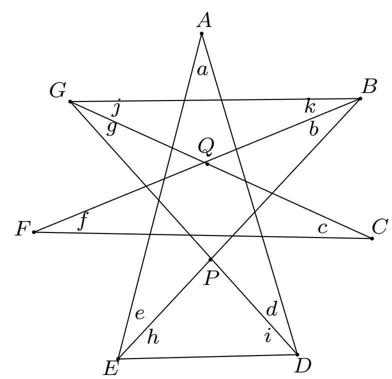
    (c) 270°

    (d) 360°



- Opción correcta: b)

- Solución:
  Llamemos a, b, c, d, e, f, g las medidas de los ángulos respectivos, h, i, j, k las medidas de los ángulos indicados en la figura.
  Sean P, Q puntos de intersección de $\overline{BE}$ con $\overline{DG}$ y $\overline{CG}$ con $\overline{BF}$ respectivamente.
  En $\triangle AED$ se tiene $a+e+d+h+j=180°$ (1)
  En $\triangle EPD$ y $\triangle GPB$ se tiene $h+i=g+b+j+k$ (2), pues $\angle EPD \cong \angle GPB$.
  En $\triangle GQB$ y $\triangle FQC$ $f+c=j+k$ (3)
  Sustituyendo (3) en (2) se tiene $h+i=g+b+f+c$ y sustituyendo en (1) se tiene $a+e+d+g+b+f+c=180°$



II Parte: Desarrollo **Valor 21 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. Se forma una secuencia de números de acuerdo con las siguientes reglas: a partir de un número dado, si es par se divide entre dos, si es impar se multiplica por tres y se le suma 1. Si se inicia con el número 23, determine el término 2016 de esta secuencia.

- Solución:

Los primeros 16 términos de la secuencia son 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

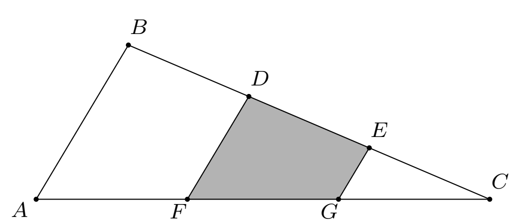
De ahí en adelante continúan repitiéndose los tres números 4, 2, 1.

Como el ciclo es de tres números, se observa que si el término de la secuencia es divisible entre tres, el número será 2 (los términos 15, 18, 21, 24, 27, ... serán 2), si el residuo es 1, el número será 1 (los términos 16, 19, 22, 25, 28, ... serán 1) y si el residuo es 2 el número será 4 (los términos 17, 20, 23, 26, 29, ... serán 4).

Como 2016 es divisible por tres, el término 2016 de la secuencia será 2

2. En un $\triangle ABC$ se toman puntos D, E en $\overline{BC}$ de forma que $BD = DE = EC$ y puntos F, G en $\overline{AC}$ de forma que $\overline{DF} \| \overline{EG} \| \overline{AB}$. Determine $\dfrac{(DEGF)}{(ABC)}$

- Solución:



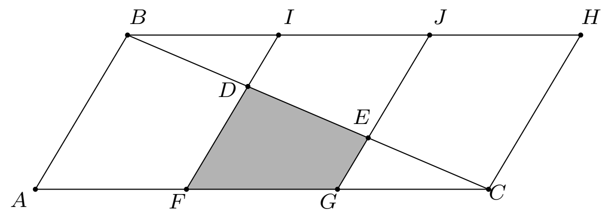
Trazamos por B una recta paralela a $\overline{AC}$ y por C una paralela a $\overline{AB}$ y sea H la intersección de estas rectas. Se tiene que $\square ABHC$ es un paralelogramo. Llamemos I, J las intersecciones de $\overleftrightarrow{DF}$ y $\overleftrightarrow{EG}$ con $\overline{BH}$ respectivamente.

Se observa también que $\square BIFA, \square IJGF$ y $\square JHCG$ son paralelogramos de igual área, pues como D y E trisecan a $\overline{BC}$, F y G trisecan a $\overline{AC}$, e I y J trisecan a $\overline{BH}$

Además $\triangle ABC \cong \triangle HCB$ y entonces $(DEGH) = (EDIJ)$.

Entonces $(BHCA) = 2(ABC) = 3(IJGF) = 3 \cdot 2(DEGF)$

Por lo tanto $(ABC) = 3(DEGF)$ y entonces $\dfrac{(DEGF)}{(ABC)} = \dfrac{1}{3}$



3. Tres fábricas de televisores A, B y C, producen cierta cantidad de televisores por día cada una. Las fábricas A y B producen en total 600 televisores en 10 días. Las fábricas B y C duran 12 días en producir 540 televisores. Si las fábricas A y C pueden hacer 440 televisores en 8 días, determine cuántos televisores produce la fábricas C en 20 días.

- Solución:

Sean a, b, c la cantidad de televisores que producen por día las fábricas A, B, C respectivamente. Entonces

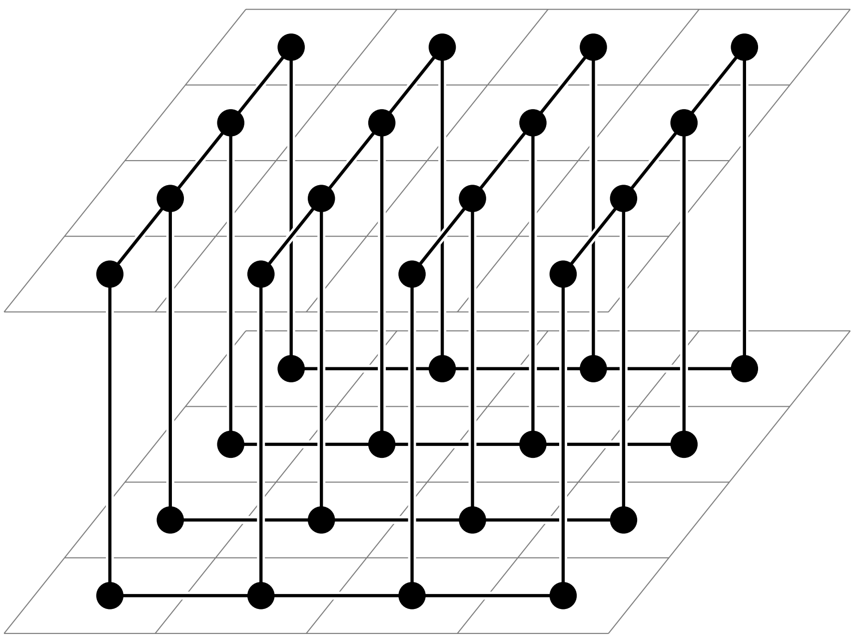
$$\left\{\begin{array}{lll} 10 \quad (a+b) & = & 600 \\ 12 \quad (b+c) & = & 540 \\ 8 \quad (a+c) & = & 440 \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \left\{\begin{array}{ll} a+b & = 60 \quad (1) \\ b+c & = 45 \quad (2) \\ a+c & = 55 \quad (3) \end{array}\right.$$

$\Rightarrow a = 60 - b$ y $c = 45 - b$ sustituyendo en la tercera ecuación
$(60 - b) + (45 - b) = 55$
$\Rightarrow 105 - 2b = 55$
$\Rightarrow b = 25$
Así, $c = 45 - 25 = 20$ y la fábricas produce $20 \cdot 20 = 400$ televisores en 20 días.

XXIX OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

MEP - UNA - UCR - MICITT - UNED - TEC

SOLUCIÓN
SEGUNDA ELIMINATORIA NACIONAL



II Nivel

($8^\circ - 9^\circ$)

2017

Estimado estudiante:

Los resultados de esta eliminatoria se publicarán a partir del lunes 02 de octubre, en la siguiente dirección electrónica: **www.olcoma.com**

La Comisión Organizadora de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas le saluda y felicita por haber clasificado a la segunda eliminatoria nacional de estas justas académicas. La prueba consta de dos partes: una primera parte de 12 preguntas de selección única, ponderadas con dos puntos cada respuesta correcta, y una segunda parte con tres preguntas de desarrollo, con un valor de siete puntos cada solución correcta.

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en las hojas de respuestas que se le han entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en las hojas de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 pts c/u**

1. Sofía tiene cierta cantidad de caramelos; se come 30 % de ellos y le quedan 280 caramelos. Carol tiene la misma cantidad de caramelos que Sofía, pero se come 26 % de ellos. La cantidad de caramelos que Carol se come es

   (a) 30

   (b) 84

   (c) 104

   (d) 296

- Opción correcta: c
- Solución:

  Sofía tiene x caramelos, se come 30 %, le queda 70 %. Es decir, le quedan $\frac{70x}{100}$ caramelos, lo cual es 280 caramelos.

  De $\frac{70x}{100} = 280$ se tiene que $x = 400$.

  Sofía tiene entonces 400 caramelos, pero Carol se come 26 % de ellos; es decir, $\frac{400 \cdot 26}{100} = 104$ caramelos.

2. Sea el $\square ABCD$ un cuadrado en el que $AB = 3$. Sea E un punto tal que $B - C - E$ y sea F el punto de intersección de $\overline{AE}$ y $\overline{CD}$. Si $BE = 4$, entonces el área del $\square ABCF$ es

   (a) $4\frac{1}{4}$

   (b) $5\frac{3}{8}$

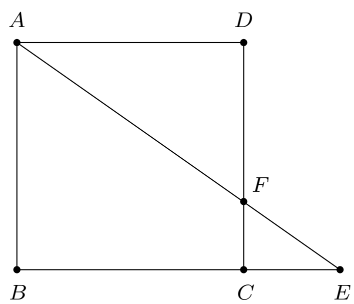
   (c) $5\frac{1}{2}$

   (d) $5\frac{5}{8}$

- Opción correcta: d

- Solución:

  Considere al figura



Se tiene que $\overline{AB} \parallel \overline{FC}$ entonces $\triangle FCE \sim \triangle ABE$, entonces

$$\frac{FC}{AB} = \frac{CE}{BE} \Rightarrow \frac{FC}{3} = \frac{1}{4} \Rightarrow FC = \frac{3}{4}$$

El $\square ABCF$ es un trapecio, entonces

$$(ABCF) = \frac{(CF + AB)BC}{2} = \frac{\left(\frac{3}{4} + 3\right) \cdot 3}{2} = \frac{45}{8} = 5\frac{5}{8}$$

3. En el número 213 se tiene que 3 divide a 21. La cantidad de números de tres dígitos que cumplen que el dígito de las unidades divide al número formado por los dígitos de las centenas y decenas es

   (a) 112

   (b) 153

   (c) 254

   (d) 360

- Opción correcta: c
- Solución:

  Se hace el conteo para cada una de las opciones del tercer dígito.

Caso 1: Si este es 0, no hay ninguno, ya que 0 no es divisor de ningún número.
Caso 2: Si es 1, hay $\lfloor \frac{99}{1} \rfloor - \lfloor \frac{9}{1} \rfloor = 90$ múltiplos de dos dígitos de 1.
Caso 3: Si es 2, hay $\lfloor \frac{99}{2} \rfloor - \lfloor \frac{9}{2} \rfloor = 45$ múltiplos de dos dígitos de 2.
Caso 4: Si es 3, hay $\lfloor \frac{99}{3} \rfloor - \lfloor \frac{9}{3} \rfloor = 30$ múltiplos de dos dígitos de 3.
Caso 5: Si es 4, hay $\lfloor \frac{99}{4} \rfloor - \lfloor \frac{9}{4} \rfloor = 22$ múltiplos de dos dígitos de 4.
Caso 6: Si es 5, hay $\lfloor \frac{99}{5} \rfloor - \lfloor \frac{9}{5} \rfloor = 18$ múltiplos de dos dígitos de 5.
Caso 7: Si es 6, hay $\lfloor \frac{99}{6} \rfloor - \lfloor \frac{9}{6} \rfloor = 15$ múltiplos de dos dígitos de 6.
Caso 8: Si es 7, hay $\lfloor \frac{99}{7} \rfloor - \lfloor \frac{9}{7} \rfloor = 13$ múltiplos de dos dígitos de 7.
Caso 9: Si es 8, hay $\lfloor \frac{99}{8} \rfloor - \lfloor \frac{9}{8} \rfloor = 11$ múltiplos de dos dígitos de 8.
Caso 10: Si es 9, hay $\lfloor \frac{99}{9} \rfloor - \lfloor \frac{9}{9} \rfloor = 10$ múltiplos de dos dígitos de 9.

Sumando todas las opciones tenemos que en total son 254.

4. En la ecuación $O \cdot L \cdot (C + O + M + A) = 77$ cada letra corresponde a un dígito diferente $(0, 1, 2, \ldots, 9)$. En este caso, las dos letras O toman valores distintos. La cantidad de maneras diferentes en que se pueden escoger los valores de las letras es

   (a) 96

   (b) 60

   (c) 48

   (d) 24

- Opción correcta: a
- Solución:

  Dado que $77 = 7 \cdot 11 = 1 \cdot 7 \cdot 11$, quiere decir que para O y L la única posibilidad para los valores es $\{O, L\} = \{1, 7\}$, que son dos posibilidades.

  Luego, para que cuatro dígitos distintos sumen 11, excluyendo al 1 y al 7, la únicas posibilidades son que $\{C, O, M, A\} = \{0, 2, 4, 5\}$ o que $\{C, O, M, A\} = \{0, 2, 3, 6\}$, de donde el número de posibilidades para cada caso es de $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, por lo que en total el número de manera diferentes es de $2\,(24 + 24) = 96$.

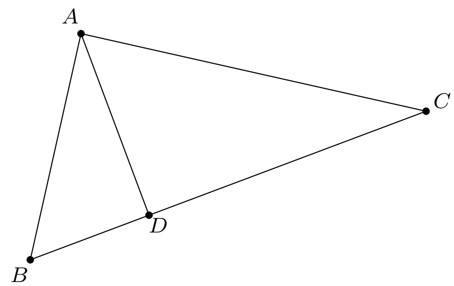
5. En la figura adjunta, el $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo con $m\angle BAC = 90°$ y $\overline{AD} \perp \overline{BC}$. Si $BC = 5$ y $AC = 4$, entonces el área del $\triangle ADC$ es

   (a) 4

   (b) 5

   (c) $\dfrac{54}{25}$

   (d) $\dfrac{96}{25}$



- Opción correcta: d
- Solución:

  Con base en el teorema de Pitágoras aplicado en el $\triangle ABC$, se tiene que

$$\begin{aligned} & AB^2 + AC^2 = BC^2 \\ \Rightarrow\ & AB^2 = 25 - 16 = 9 \\ \Rightarrow\ & AB = 3 \end{aligned}$$

En los triángulos rectángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DAC$ los ángulos agudos $\angle ABC$ y $\angle DAC$ son congruentes, ya que $\angle BAC \cong \angle ADC$ (ángulos rectos) y $\angle ACB \cong \angle DCA$ (mismo ángulo), por lo que $\triangle ABC \sim \triangle DAC$; así, $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow DA = \dfrac{3}{4}DC$.

Aplicando el teorema de Pitágoras en el $\triangle ADC$ se tiene que

$$\begin{aligned} & DA^2 + DC^2 = AC^2 \\ \Rightarrow\ & \left(\frac{3}{4}DC\right)^2 + DC^2 = 4^2 \\ \Rightarrow\ & \frac{9}{16}DC^2 + DC^2 = 16 \\ \Rightarrow\ & \frac{25}{16}DC^2 = 16 \\ \Rightarrow\ & DC^2 = 16 \cdot \frac{16}{25} \\ \Rightarrow\ & DC = \frac{16}{5} \end{aligned}$$

Por lo que $DA = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{16}{5} = \dfrac{12}{5}$ y $(ADC) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{16}{5} \cdot \dfrac{12}{5} = \dfrac{96}{25}$.

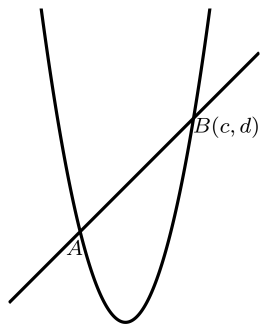
6. En la figura adjunta están representadas las ecuaciones $y = x - 1$ y $y = x^2 + ax + b$. Los puntos A y B son los puntos de intersección entre la recta y la parábola. Si las coordenadas del punto A son $(1, 0)$ y el punto $(0, 5)$ pertenece a la parábola, entonces las coordenadas del punto B son

   (a) $(4, 3)$

   (b) $(5, 4)$

   (c) $(6, 5)$

   (d) $(7, 6)$



- Opción correcta: c
- Solución:

  Como $(0, 5)$ pertenece a la parábola, satisface la ecuación $y = x^2 + ax + b$; así, $b = 5$.

  Como $A\,(1, 0)$ pertenece a la parábola, satisface la ecuación $y = x^2 + ax + 5$; así, $a = -6$.

  Con lo anterior, la ecuación de la parábola es $y = x^2 - 6x + 5$.

  El punto $B\,(c, d)$ satisface tanto la ecuación de la recta como la ecuación de la parábola, por lo que $d = c - 1$ y $d = c^2 - 6c + 5$. Luego,

$$\begin{aligned} & c^2 - 6c + 5 = c - 1 \\ \Rightarrow\ & c^2 - 7c + 6 = 0 \\ \Rightarrow\ & (c - 1)(c - 6) = 0 \\ \Rightarrow\ & c = 1 \ \vee\ c = 6 \end{aligned}$$

  Uno de los puntos es $A\,(1, 0)$ y el otro punto es $B\,(6, 5)$.

7. Una *suma circular* de dos números se define como sumar ambos números y restarle o sumarle seis las veces necesarias para que el resultado esté entre 1 y 6, inclusive.
   Por ejemplo, la *suma circular* de 8 y 9 es $17-6-6=5$, y la *suma circular* de 4 y -7 es $-3+6=3$.
   Carlos y Karla juegan a lo siguiente: Karla elige un número y luego Carlos lanza un dado, si el resultado del dado es mayor o igual que la suma circular de este y el número de Karla, entonces Carlos gana (en caso contrario gana Karla).
   Si Karla puede elegir solo algún valor del conjunto $\{-2,-1,2,3\}$, entonces el número que debe elegir Karla para tener más posibilidad de ganar es

   (a) -2

   (b) -1

   (c) 2

   (d) 3

- Opción correcta: c
- Solución:

  Si Karla elige el 2, entonces solo puede perder si el resultado del dado es 5 o 6, con lo que la suma circular sería 1 y 2 respectivamente (ya que $5>1$ y $6>2$); si el resultado del dado es otro, Karla gana.

  En los otros casos se puede ver como Carlos gana en más de dos casos.

  Para -2, Carlos gana con 3, 4, 5 o 6 como resultado del dado; para -1, Carlos gana con 2, 3, 4, 5 o 6 como resultado del dado; y para 3, Carlos gana con 4, 5 o 6 como resultado en el dado.

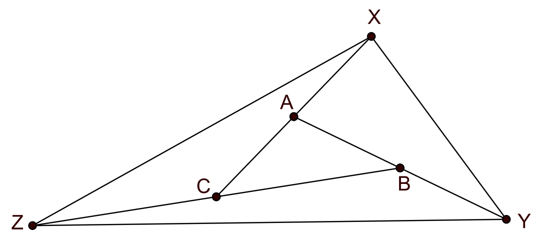
8. Los tres lados del $\triangle ABC$ se prolongan una distancia igual a sus respectivas longitudes, tal y como se observa en la figura adjunta. Si el área del $\square XCBY$ es 18 cm^2, entonces el área en cm^2 del $\triangle XYZ$ es

   (a) 28

   (b) 30

   (c) 36

   (d) 42



- Opción correcta: d
- Solución:

  El $\triangle ABC$ tiene la misma base y la mitad de la altura del $\triangle AXY$ (esto con teorema de Tales o semejanza de triángulos al considerar las alturas desde B y desde Y sobre $\overline{AC}$ y $\overline{XC}$, respectivamente); por lo tanto, el $\triangle ABC$ tiene una área de 6 cm^2.

  En forma similar, los triángulos $\triangle ZCX$ y $\triangle ZBY$ tienen áreas iguales a 12 cm^2 cada uno (el doble del área del $\triangle ABC$).

  Por tanto el área del $\triangle XYZ$ es de 42 cm^2.

9. Considere la ecuación cuadrática $x^2 + \frac{p}{3}x + q - 5 = 0$ en la que p y q son constantes reales. Si $p+q$ es un número primo y la ecuación posee una única solución real, entonces $p+q$ es

   (a) 2

   (b) 3

   (c) 5

   (d) 7

- Opción correcta: c
- Solución:

  Denote n: única solución de la ecuación cuadrática $x^2 + \frac{p}{3}x + q - 5 = 0$.

  Luego, $x^2 + \frac{p}{3}x + q - 5 = 0$ se puede escribir como $(x-n)^2 = x^2 - 2nx + n^2 = 0$.

  Luego, $-2n = \frac{p}{3}$ y $n^2 = q-5$, de donde $p = -6n$, $q = n^2+5$ y $p+q = n^2-6n+5 = (n-5)(n-1)$.

  Como $p+q$ es un número primo, hay dos posibles casos:

  1) $n-5 = 1$, $n = 6$ y $n-1 = 5$

  2) $n-1 = 1$, $n = 2$ y $n-5 = -3$

  En el primer caso $p+q = 5$ y en el segundo $p+q = -3$. El segundo caso no puede darse pues $p+q$ es un número primo. Así, $p+q = 5$.

10. Considere los números $p = n\left(n^2 - 1\right)$ con n entero y $1 \leq n \leq 2017$. La cantidad de números p que terminan en 0 es

   (a) 1209

   (b) 1210

   (c) 1211

   (d) 1212

- Opción correcta: b

- Solución:

  Como $p = n(n-1)(n+1)$, p es el producto de tres números consecutivos y el último dígito de un producto solo depende de los últimos dígitos de los factores, basta examinar los productos:

$n-1$	n	$n+1$	Termina
1	2	3	6
2	3	4	4
3	4	5	0
4	5	6	0
5	6	7	0
6	7	8	6
7	8	9	4
8	9	10	0
9	10	11	0
10	11	12	0

  Como hay una secuencia de $\{6, 4, 0, 0, 0\}$ y $2015 = 403 \cdot 5$, significa que de $n = 2$ a $n = 2017$ hay $403 \cdot 3 = 1209$ números p que terminan en cero; además, como el primer p es cero, hay 1210 en total.

11. Sean a, b y c números reales, con $a \neq c$. Sean

$$P(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 2$$

$$Q(x) = 3x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 2$$

Las condiciones que deben cumplir los números a, b y c para que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ tengan dos raíces comunes son

(a) $a = 3$ y $b = c$

(b) $b = -5$ y $a = -c$

(c) $c = -3$ y $a = b$

(d) $b = 5$ y $c = 2a$

- Opción correcta: b
- Solución:

Para que $P(x) = Q(x) = 0$ se tiene que $P(x) - Q(x) = (a-c)x^3 + (c-a)x = (a-c)x(x-1)(x+1) = 0$.

Esto nos dice que las posibles raíces comunes deben ser 0, 1 o -1 y no puede haber una raíz doble común. Ahora $x = 0$ no es raíz de ninguno de los polinomios.

Por otra parte $P(1) = Q(1) = 0$ implica que $a + b + c + 5 = 0$ y $P(-1) = Q(-1) = 0$ implica que $-a + b - c + 5 = 0$, de donde $b = -5$ y $a = -c$

12. La cantidad de números enteros positivos k, múltiplos de siete, que cumplen que el producto de sus dígitos es igual a $\dfrac{19k-2808}{8}$ es

    (a) 0

    (b) 1

    (c) 2

    (d) 3

- Opción correcta: b

- Solución:

  Como el producto $\dfrac{19k-2808}{8} = \dfrac{19k}{8} - 351$ es un número entero, entonces $8|k$ y por lo tanto $k = 8n$, para algún $n \in \mathbb{Z}$, lo que significa que k es par y el producto de sus dígitos $19n - 351$ también es par. De lo anterior se tiene que n tiene que ser impar y $n \geq 19$.

  Por otra parte, el producto de los dígitos de k es menor que k, (en efecto, sea k tal que $k = a_n 10^{n-1} + \cdots + 10a_1 + a_0 \geq a_n 10^{n-1} > a_n 9^{n-1} \geq a_n \cdot a_{n-1} \cdots a_0$) es decir $19n - 351 < 8n$ lo que significa que $n < 31$, pero k es múltiplo de 7 y, por lo tanto, $n = 21$; al comprobar se tiene que $k = 168$ cumple lo establecido.

II Parte: Desarrollo **Valor 21 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. Considere el número de 28 dígitos de la forma

$$1\,223\,334\,444\,555\,556\,666\,667\,777\,777$$

Determine la menor cantidad de dígitos que deben cambiarse para que el número resultante sea divisible por 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

Solución:

Para que el número sea divisible por 5 debe terminar en 0 o 5, pero para que también sea divisible por 2 debe terminar en par, por lo tanto, debe cambiarse el último 7 por un 0.

Por otro lado, para que sea divisible por 4, el número formado por los dos últimos dígitos debe ser divisible por 4. Vemos que 70 no es divisible por 4, por lo que debe cambiarse el siguiente 7 por un número par (0, 2, 4, 6, 8).

Además, para que sea divisible por 3, la suma de los dígitos debe ser múltiplo de 3, y esto será suficiente para que también sea divisible por 6 (pues entonces será divisible por 2 y 3).

La suma de los dígitos del número original es $1+4+9+16+25+36+49 = 140$, pero al cambiar el último 7 por un 0, la suma será 133. Como además se debe cambiar otro 7 por 8, 6, 4, 2 o 0, debemos asegurarnos de que la suma de los dígitos se múltiplo de 3. Lo anterior se puede lograr únicamente al cambiar el penúltimo siete por un seis o por un cero, pues esto resta 1 a la suma de los dígitos (en el caso del seis) y la suma será 132; en el otro caso la suma será 126 (cuando es cero el usado).

Por lo tanto, basta cambiar dos dígitos (los últimos)

$$1\,223\,334\,444\,555\,556\,666\,667\,777\,760$$

$$1\,223\,334\,444\,555\,556\,666\,667\,777\,700$$

2. Un colegio organiza un campeonato de fútbol sala. Participan seis equipos; en cada ronda juegan todos los equipos, de modo que se juegan tres partidos por jornada. Al final del campeonato, todos han jugado exactamente una vez contra los demás equipos. El equipo ganador de un partido gana tres puntos, el que pierde no obtiene puntos, y si hay empate cada equipo gana un punto.

   a) Si al final de la segunda jornada se sabe que solo un partido terminó en empate, determine si es posible que todos los equipos tengan puntuaciones diferentes.

   b) Al final del campeonato se sabe que hubo exactamente 11 partidos que terminaron en empate. Si todos los equipos tienen diferentes puntuaciones, determine el menor puntaje posible para el equipo que queda en primer lugar del campeonato.

Solución:

a) Al final de la segunda jornada los resultados posibles son 0, 1, 3, 4 o 6, pues un equipo dado como máximo empató en un juego. Como hay 5 resultados posibles y 6 equipos, entonces hay dos equipos que tienen la misma puntuación y así, no es posible que todos los equipos tengan puntuaciones diferentes.

b) Si k es la puntuación del primer lugar y todas las puntuaciones son distintas, entonces la suma de los puntos de todos los equipos es como máximo

$$k + (k-1) + (k-2) + (k-3) + (k-4) + (k-5) = 6k - 15$$

Como de los 15 partidos 11 terminaron en empate, de estos se distribuyen $11 \cdot 2 = 22$ puntos. De los restantes 4 partidos, algún equipo tiene que haber ganado, de modo que se distribuye $4 \cdot 3 = 12$ puntos; es decir, la suma total debe ser igual a $22 + 12 = 34$ puntos. Luego, debe cumplirse que

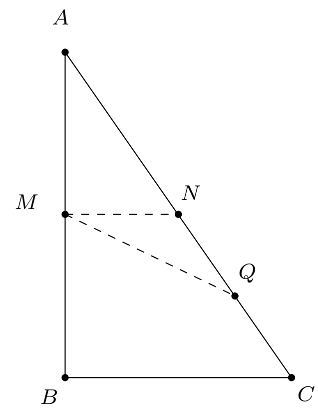
$$6k - 15 \geq 34 \Rightarrow k \geq 9$$

Para comprobar que esto, basta dar un ejemplo de tal situación. En la tabla siguiente se marca en la intersección de la fila i con la columna j con la cantidad de puntos ganados por el equipo i en ese partido.

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	Total
E_1	$\times$	1	1	1	0	0	3
E_2	1	$\times$	1	1	1	0	4
E_3	1	1	$\times$	1	1	1	5
E_4	1	1	1	$\times$	3	1	7
E_5	3	1	1	0	$\times$	1	6
E_6	3	3	1	1	1	$\times$	9

3. Sea el $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo, tal que $m\angle ABC = 90°$ y $AB = 12$ cm. Sea Q un punto tal que $A - Q - C$ y $AQ = 3CQ$. Si M el punto medio de $\overline{AB}$ y el área del $\square BMQC = 30$ cm^2, determine CQ.

Solución:



Sea N el punto medio de $\overline{AC}$, así tenemos:

$AQ + CQ = AC \Rightarrow 3CQ + CQ = AC \Rightarrow CQ = \dfrac{1}{4}AC = \dfrac{1}{2}CN$

$\overline{BC} \parallel \overline{MN}$ y $BC = 2MN$.

Si h es la medida de la altura del $\triangle MNQ$ desde el punto Q, entonces $h = \dfrac{1}{2}BM = \dfrac{1}{4}AB = 3$ cm.

Así tenemos:

$$\begin{aligned}
(BMNC) = (MNQ) + (BMQC) \quad &\Rightarrow \quad (BMNC) = \frac{1}{2}(MN + BC) \cdot BM = \frac{1}{2}MN \cdot h + 30 \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(MN + 2MN) \cdot \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}MN \cdot 3 + 30 \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2}3MN \cdot \frac{1}{2}12 = \frac{1}{2}MN \cdot 3 + 30 \\
&\Rightarrow \quad 9MN = \frac{3}{2}MN + 30 \\
&\Rightarrow \quad 9MN - \frac{3}{2}MN = 30 \\
&\Rightarrow \quad \frac{15}{2}MN = 30 \\
&\Rightarrow \quad MN = 4
\end{aligned}$$

Así, se tiene que $BC = 8$ cm. y por Pitágoras se tiene que

$12^2 + 8^2 = AC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{208}$ cm. $= 2\sqrt{52}$ cm.

Por lo tanto, $CQ = \dfrac{\sqrt{52}}{2}$ cm.