XXVI OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

UCR-UNA-ITCR-UNED-MEP-MICIT

SEGUNDA ELIMINATORIA
NACIONAL

EXAMEN TERCER NIVEL
SOLUCIONARIO

2014

I Parte: Selección Única

1. Si E y F son puntos exteriores a un cuadrado $ABCD$ de centro O tal que $\triangle EDC$ y $\triangle FAD$ son triángulos equiláteros entonces la razón de las áreas de los triángulos $\triangle FDE$ y $\triangle DOC$ es

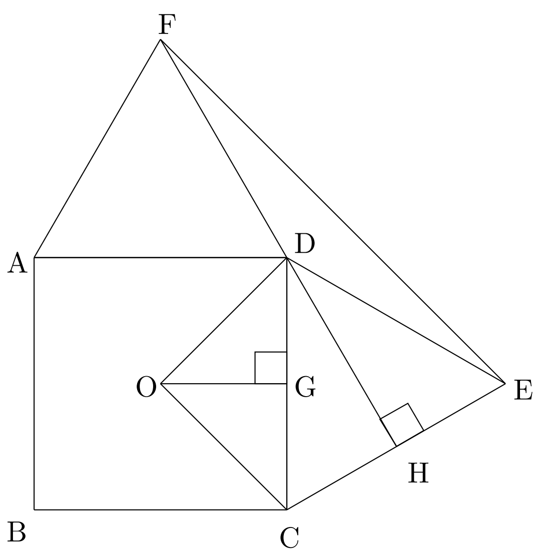
   (a) $\dfrac{1}{2}$

   (b) 1

   (c) $\dfrac{3}{2}$

   (d) 2

Solución



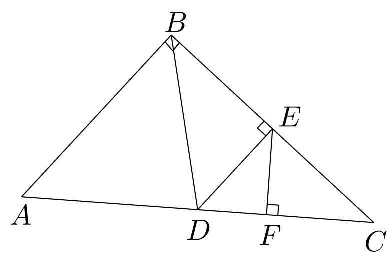
Sea 1 la medida del lado del cuadrado. Entonces $a(\triangle DOC) = \dfrac{DC.OG}{2} = \dfrac{1.\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4}$. Obseve que $\angle FDE = 360° - 60° - 60° - 90° = 150°$. Sea H en $\overline{CE}$ tal que DH es altura del $\triangle DEC$ y como es equilátero $\angle EDH = 30° \Rightarrow \angle FDE + \angle EDH = 180°$ y así $F - D - H$ y EH es la altura del $\triangle FDE$.

Además, como $\angle EDH = 30°$, entonces $EH = \dfrac{1}{2}$ y $a(\triangle FDE) = \dfrac{FD.EH}{2} = \dfrac{1.\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4}$

Por lo tanto, $a(\triangle DOC) = a(\triangle FDE)$ y su razón es 1.

Respuesta correcta: Opción b.

2. Según los datos de la figura adjunta, si D es el punto medio de $\overline{AC}$, $AB = 8$ y $BD = 5$, entonces FC es igual a



(a) $\dfrac{9}{2}$
(b) $\dfrac{9}{5}$
(c) $\dfrac{16}{5}$
(d) $\dfrac{64}{5}$

Solución

D punto medio de $\overline{AC}$ y $\overline{DE} \parallel \overline{AB} \Rightarrow \begin{cases} DE = \frac{1}{2}AB = 4 \\ E \text{ punto medio de } \overline{BC} \end{cases}$

Aplicando el Teorema de Pitágoras en el $\triangle BDE$ se obtiene $BE = 3 = EC$.
Además $\triangle DEB \cong \triangle DEC$ por el criterio de congruencia L.A.L., así $CD = BD = 5$.
Por último, empleando el teorema del cateto en el $\triangle DEC$ se obtiene $3^2 = 5 \cdot y \Rightarrow y = \dfrac{9}{5}$.

Respuesta correcta: Opción b.

3. Se toman cinco puntos en una circunferencia y se seleccionan al azar cuatro cuerdas que unen dos de los cinco puntos. Entonces, la probabilidad de que las cuatro cuerdas formen un cuadrilátero convexo es

(a) $\dfrac{1}{105}$
(b) $\dfrac{1}{42}$
(c) $\dfrac{1}{15}$
(d) $\dfrac{1}{14}$

Solución

Cuatro puntos cualesquiera de los cinco dados determinan un único cuadrilátero convexo de manera que hay exactamente cinco resultados favorables cuando las cuerdas se seleccionan al azar. Ya que hay $\binom{5}{2} = 10$ cuerdas, se sigue que hay $\binom{10}{4} = 210$ formas de escoger las cuatro cuerdas y la probabilidad buscada es $\dfrac{5}{210} = \dfrac{1}{42}$.

Respuesta correcta: Opción b.

4. Si f es una función cuyo criterio es $f(x) = \dfrac{x(x-1)}{2}$ entonces $f(x+2)$ corresponde a

(a) $\dfrac{(x+2)f(x+1)}{x}$

(b) $\dfrac{xf(x)}{x+2}$

(c) $f(x) + f(2)$

(d) $x(x+2)f(x)$

Solución

$f(x+1) = \dfrac{(x+1)(x+1-1)}{2} = \dfrac{(x+1)x}{2}$ así que, $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{f(x+1)}{x}$ y entonces

$$f(x+2) = \frac{(x+2)(x+2-1)}{2} = \frac{(x+2)(x+1)}{2} = \frac{(x+2)f(x+1)}{x}$$

Respuesta correcta: Opción a.

5. La cantidad de divisores del número 2014^{2014} es

(a) 2015

(b) 2015^2

(c) 2015^3

(d) 2015^4

Solución

$2014^{2014} = (2 \cdot 19 \cdot 53)^{2014} = 2^{2014} \cdot 19^{2014} \cdot 53^{2014}$. Por lo tanto el número de divisores es $(2014+1) \cdot (2014+1) \cdot (2014+1) = 2015^3$.

Respuesta correcta: Opción c.

6. ¿Cuál es la mayor cantidad posible de rectas que determinan 2014 puntos?

   (a) $2013 \cdot 2014$
   (b) $1007 \cdot 2013$
   (c) $1007 \cdot 2014$
   (d) $2014 \cdot 2014$

Solución

Con dos puntos se tiene una única recta, con tres puntos se tienen tres rectas y con cuatro puntos se tiene un máximo de seis rectas.

Resumamos más casos en la siguiente tabla:

Nḿero de untos	Número de rectas	Forma de calcularla
2	1	$\frac{1 \cdot 2}{2}$
3	3	$\frac{2 \cdot 3}{2}$
4	6	$\frac{3 \cdot 4}{2}$
5	10	$\frac{4 \cdot 5}{2}$
6	15	$\frac{5 \cdot 6}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n		$\frac{(n-1) \cdot n}{2}$

Con 2014 puntos se tienen un máximo de $\frac{2013 \cdot 2014}{2} = 2013 \cdot 2014 = 2027091$ rectas.

Respuesta correcta: Opción a.

7. En un hexágono regular de radio 1 se construyen seis círculos de modo que cada lado del hexágono es un diámetro de cada uno de ellos. Si se pinta el interior de estos seis círculos, el área total pintada es

   (a) π
   (b) $\dfrac{3\pi}{2}$
   (c) $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$
   (d) $\pi + \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

Solución

Cada lado del hexágono mide 1, por lo que cada radio del círculo mide $r = \dfrac{1}{2}$. El área de cada círculo es $\dfrac{\pi}{4}$. Si se suman las áreas de los seis círculos se está sumando de más las regiones donde cada par de ellos se intersecan, entonces, para obtener el área sombreada se debe restar el área de las seis regiones de intersección.

El área de una de estas regiones es

$$2\left(\frac{\pi r^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

Luego, el área pintada es

$$A = 6 \cdot \frac{\pi}{4} - 6 \cdot \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \pi + \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Respuesta correcta: Opción d.

8. La cantidad de kilos de café con valor de 5600/kg que hay que mezclar con 77 kg de otro café de menor calidad, a 4200/kg, para que la mezcla tenga un valor de 4522/kg es

   (a) 23
   (b) 57
   (c) 65
   (d) 93

Solución

Si x es la cantidad de kilos de café de 5600/kg que hay que agregar, entonces
$\dfrac{5600 \cdot x + 77 \cdot 4200}{77 + x} = 4522 \quad \Rightarrow x = 23.$

Respuesta correcta: Opción a.

9. Si x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación $4a^4b^2 - 12a^2bx + 5x^2 = 0$ con a, b constantes reales y $b \geq 0$, entonces la expresión $|x_1 - x_2|$ es equivalente a

   (a) $\dfrac{8a^2b}{5}$

   (b) $\dfrac{12a^2b}{5}$

   (c) $\dfrac{8ab^2}{5}$

   (d) $\dfrac{12ab^2}{5}$

Solución

Factoricemos el polinomio $4a^4b^2 - 12a^2bx + 5x^2$.

$$\begin{aligned} 4a^4b^2 - 12a^2bx + 5x^2 &= 4a^4b^2 - 12a^2bx + 9x^2 + 5x^2 - 9x^2 \\ &= (2a^2b - 3x)^2 - 4x^2 \\ &= (2a^2b - 3x - 2x)(2a^2b - 3x + 2x) \\ &= (2a^2b - 5x)(2a^2b - x) \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} 4a^4b^2 - 12a^2bx + 5x^2 = 0 &\Leftrightarrow (2a^2b - 5x)(2a^2b - x) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2a^2b - 5x = 0) \vee (2a^2b - x = 0) \\ &\Leftrightarrow \left(x = \frac{2a^2b}{5}\right) \vee (x = 2a^2b) \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad tomamos $x_1 = \dfrac{2a^2b}{5}$ y $x_2 = 2a^2b$

$$\Rightarrow |x_1 - x_2| = \left|\frac{2a^2b}{5} - 2a^2b\right| = \left|-\frac{8a^2b}{5}\right| = \frac{8a^2b}{5} \text{ (por hipótesis } b \geq 0)$$

Respuesta correcta: Opción a.

10. Si las soluciones de la ecuación $x^2 + px + q = 0$ son el cubo de las soluciones de la ecuación $x^2 + mx + n = 0$ entonces se cumple que

(a) $p = m^3 - 3mn$
(b) $p = m^3 + 3mn$
(c) $p + q = m^3$
(d) $\left(\frac{m}{n}\right)^3 = \frac{p}{q}$

Solución

Si a y b son las soluciones de la ecuación $x^2 + px + q = 0$ entonces $-m = a + b$, $-p = a^3 + b^3$, $n = ab$, $q = a^3b^3$. Como $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ se obtiene $-m^3 = -p + 3n(-m)$, es decir, $p = m^3 - 3mn$.

Respuesta correcta: Opción a.

11. Sea la función de segundo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ tal que $f(0) = f(3)$, una de sus intersecciones con el eje x es $(1, 0)$ y la componente "y"del vértice es $\frac{-1}{4}$. Determine la otra intersección con el eje x.

(a) $(2, 0)$
(b) $(-1, 0)$
(c) $(-2, 0)$
(d) No hay otra intersección

Solución

Dado que $f(0) = f(3)$ tenemos $c = 9a + 3b + c$ entonces $0 = 9a + 3b$ y así $b = -3a$.

Como $(1, 0)$ es una intersección con el eje x tenemos que $f(1) = 0$, entonces $a + b + c = 0$ y sustituyendo b obtenemos $a - 3a + c = 0$ y así $c = 2a$.

Ahora tenemos que $\dfrac{4ac - b^2}{4a} = \dfrac{-1}{4}$, sustituyendo b y c obtenemos $\dfrac{4a(2a) - (-3a)^2}{4a} = \dfrac{-1}{4}$ entonces $\dfrac{8a^2 - 9a^2}{4a} = \dfrac{-1}{4}$ y así $\dfrac{-a^2}{4a} = \dfrac{-1}{4}$, de lo anterior $-a = -1$ y entonces $a = 1$.
Ahora sustituyendo a en b y c obtenemos $b = -3$ y $c = 2$, de esta forma tenemos que la función dada es $f(x) = x^2 - 3x + 2$ y la otra intersección con el eje x viene dada por $(2, 0)$.

Respuesta correcta: Opción a.

12. Si a y b son números enteros positivos y $a^b = 36^{15}$ y $b^a = 1000000^{36}$. Entonces el resultado de $a+b$ corresponde a

    (a) $\log 10^{216}$

    (b) 226

    (c) 360

    (d) 2014

Solución

Note que $a^b = 36^{15} \Rightarrow a^b = (6^2)^{3\cdot 5} \Rightarrow a^b = (6^3)^{2\cdot 5} \Rightarrow a^b = 216^{10}$, mientras que, $b^a = 1000000^{36} \Rightarrow b^a = (10^6)^{36} \Rightarrow b^a = 10^{216}$, por lo que $a = 216$ y $b = 10$. Entonces $a+b = 226$.

Respuesta correcta: Opción b.

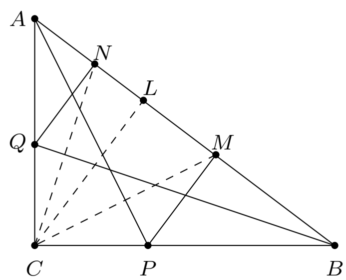
II Parte: Desarrollo

Instrucciones. Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste los ejercicios en forma ordenada, completa y clara, se califica procedimiento y respuesta.

1. Sea el $\triangle ABC$, recto en C, las bisectrices interiores de $\angle BAC$ y $\angle ABC$ intersecan a $\overline{BC}$ y a $\overline{CA}$ en los puntos P y Q respectivamente. Sean M y N los pies de las perpendiculares desde P y Q al lado $\overline{AB}$ respectivamente, determine $m\angle MCN$.

Solución

Considere la figura



Se tiene que $m\angle CAP = m\angle PAM$ ($\overline{AP}$ bisectriz), además $m\angle ACP = m\angle PMA$ (son rectos) y así $m\angle APC = m\angle APM$ (suma de ángulos internos de un triángulo) y por el criterio $A-L-A$ tenemos que $\triangle CAP \cong \triangle MAP$ y entonces $\overline{CP} \cong \overline{MP}$. Sea L el pie de la perpendicular desde C sobre $\overline{AB}$, así tenemos que $\overline{PM} \parallel \overline{CL}$, ahora $m\angle PCM = m\angle PMC$ ($\triangle CPM$ es isósceles) y $m\angle PMC = m\angle MCL$ (alternos internos entre paralelas) y entonces $m\angle PCM = \angle MCL$.
De forma análoga $m\angle QCN = m\angle NCL$ y así tenemos:

$$\begin{aligned} m\angle QCN + m\angle NCL + \angle PCM + \angle MCL = 90^\circ &\implies 2m\angle NCL + 2m\angle MCL = 90^\circ \\ &\implies 2(m\angle NCL + m\angle MCL) = 90^\circ \\ &\implies m\angle NCL + m\angle MCL = 45^\circ \\ &\implies m\angle MCN = 45^\circ \end{aligned}$$

2. Sean x, y, z números enteros tales que $x + y + z$ es divisible por 6 y $x^2 + y^2 + z^2$ es divisible por 36. Pruebe que $x^3 + y^3 + z^3$ es divisible por 8.

Solución

Como $x + y + z$ es divisible por 6 todos los números son pares o sólo uno de los números es par. Si solamente uno de los números es par el residuo de dividir $x^2 + y^2 + z^2$ por 4 es 2 que contradice que $x^2 + y^2 + z^2$ es divisible por 36, por tanto, todos los números son pares y existen enteros a, b, c tales que $x^3 + y^3 + z^3 = (2a)^3 + (2b)^3 + (2c)^3 = 8(a^3 + b^3 + a^3)$ y $x^3 + y^3 + z^3$ es divisible por 8.

3. Sea $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) \neq 0, f(1) = 1$ y $f(n)f(m) = f(n+m) + f(n-m)$ para todo $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, n \geq m$. Determine el valor de $f(2014)$.

Solución

Tomando $n = m = 0$ se tiene $f(0)f(0) = f(0) + f(0) \Rightarrow (f(0))^2 = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 2$, pues $f(0) \neq 0$.

Tomando $m = 1$ se tiene $f(n)f(1) = f(n+1) + f(n-1) \Rightarrow f(n+1) = f(n) - f(n-1)$, pues $f(1) = 1$

Utilizando esta igualdad se pueden calcular los demás valores, veamos:
$f(2) = f(1) - f(0) = 1 - 2 = -1$
$f(3) = f(2) - f(1) = -1 - 1 = -2$
$f(4) = f(3) - f(2) = -2 - -1 = -1$
$f(5) = f(4) - f(3) = -1 - -2 = 1$
$f(6) = f(5) - f(4) = 1 - -1 = 2$

Vemos que hay un periodo de longitud 6.
Como $2014 = 335 \cdot 6 + 4$, se tiene que $f(2014) = f(4) = -1$

XXVII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

UNA - UCR - TEC - UNED - MEP - MICIT

SOLUCIÓN II ELIMINATORIA NACIONAL

III Nivel

$(10^\circ - 11^\circ - 12^\circ)$

2015

I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 pts c/u**

1. Maya y Nicolás comen cada semana en el mismo café y siempre gastan lo mismo, pero nunca ordenan exactamente lo mismo. Hace tres semanas ordenaron dos refrescos de fresa, una taza de té y un pastel. Hace dos semanas fueron dos tazas de té y un pastel. Hace una semana fueron dos refrescos de fresa y tres tazas de té. Esta semana han ordenado, hasta el momento, tres tazas de té.
   Mientras hacen cuentas, deciden que solo van a ordenar una cosa más, en caso de que todavía no hayan gastado lo mismo de siempre. Determine cuál ítem orderarán, o si no necesitan ordenar nada más:
   (a) Pastel
   (b) Refresco de fresa
   (c) Una taza de té
   (d) Nada más

   Solución:

   Respuesta correcta: Opción c)

   De los resultados de hace tres semanas y de la semana pasada, podemos ver que un pastel cuesta igual que dos tazas de té. Analizando la orden de hace dos semanas, vemos que dos tazas de té y un pastel equivalen al gasto de cuatro tazas de té. Por lo tanto, ordenar una taza de té esta semana, hará que el gasto sea el mismo de siempre.

   Además, note que como la semana pasada ordenaron tres tazas de té y dos refrescos de fresa, ordenar un refresco de fresa u ordenar nada no sería suficiente. Finalmente, como un pastel equivale a dos tazas de té, ordenar un pastel haría que el gasto fuera mayor a las semanas anteriores.

2. Sean a y b dos enteros positivos coprimos, es decir, el mx́imo común divisor entre ellos es 1. Si a tiene exactamente 4 divisores positivos, y b tiene exactamente 4 divisores positivos, entonces el máximo número de divisores positivos que tiene ab es
   (a) 1
   (b) 4
   (c) 8
   (d) 16

   Solución:

   Respuesta correcta: Opción d)

   Sabemos que a y 1 son dos divisores positivos de a (y no son iguales pues $a \neq 1$ dado que solo tendría un divisor positivo en ese caso). Además a no puede tener más de dos divisores primos distintos, pues entonces habría más de 4 divisores.

Analizando su factorización prima, a solo podría tener la forma $a = p^3$, o $a = pq$, con p, q primos distintos, pues si solo aparece un primo, éste deber estar elevado a la 3 (para tener exactamente 4 divisores: $1, p, p^2, p^3$); y si aparecen dos primos, ninguno puede estar elevado a una potencia mayor que 1 pues si no, por ejemplo, p^2q o pq^2 son divisores positivos adicionales a $1, p, q, pq$.

Un análisis similar nos dice que $b = r^3$ o $b = rs$, donde r, s son primos distintos a p, q pues a y b son coprimos.

Entonces ab es igual a p^3r^3 o pqr^3 o p^3rs o $pqrs$.

En el primer caso los divisores son de la forma p^ir^j, donde $0 \leq i, j \leq 3$, por lo que hay $4 \cdot 4 = 16$ opciones. En el segundo caso (que es análogo al tercero), los divisores tienen la forma $p^iq^jr^k$, donde $0 \leq i, j \leq, 0 \leq k \leq 3$, por lo que hay $2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$ opciones. Finalmente, en el último caso, los divisores son de la forma $p^iq^jr^ks^t$, donde $0 \leq i, j, k, t \leq 1$, por lo que hay $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ opciones. En cada caso, la respuesta es 16.

3. Hay cinco cajas, A, B, C, D, E, y Henry tiene 1000 cartas, cada una con un único y diferente número del uno al mil, ambos inclusive. Echa las cartas, una por una, en las cajas de la siguiente forma: echa la 1 en la A, la 2 en la B, y así hasta la 5 en la E, se salta la A, y echa la 6 en la B, la 7 en la C, y así hasta la 10 en la A, se salta la B. Si continúa de la misma forma hasta acabar las 1000 cartas, la carta 763 va en la caja

   (a) B

   (b) C

   (c) D

   (d) E

   Solución:

   Respuesta correcta: Opción d)

   Note el siguiente patrón, donde una X representa que nos saltamos la caja, y donde tenemos las cajas ordenadas como ABCDE:

$$1, 2, 3, 4, 5$$

$$X, 6, 7, 8, 9$$

$$10, X, 11, 12, 13$$

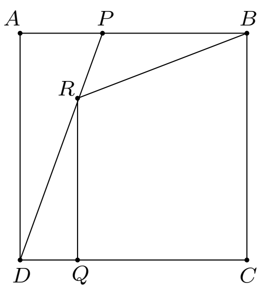
$$14, 15, X, 16, 17$$

$$18, 19, 20, X, 21$$

$$22, 23, 24, 25, X$$

Cada 25 cartas, volvemos a repetir este patrón. Por lo tanto, como $763 = 25(30) + 13$, su posición es la misma que aquella de la carta 13. O sea, va en la E.

4. Considere la siguiente figura en la cual el $\square ABCD$ es un cuadrado de lado 12. Si $AP = 4$, $DQ = 3$ y $m\angle RQC = 90°$ determine la longitud de $\overline{RB}$.

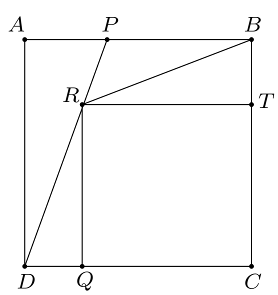


(a) $4\sqrt{3}$
(b) $3\sqrt{10}$
(c) 9
(d) $6\sqrt{3}$

Solución:

Respuesta correcta: Opción b)

Tome T en $\overline{BC}$ tal que $\overline{RT} \perp \overline{BC}$, tal como se muestra en la figura



$\overline{AD} \parallel \overline{QR}$ entonces $\angle ADP \cong \angle DRQ$ así $\triangle PDA \sim \triangle DRQ$ entonces

$$\frac{12}{4} = \frac{DA}{PA} = \frac{RQ}{DQ} = \frac{RQ}{3}$$

y así $RQ = 9$, entonces $BT = 3$ y $RT = 9$, aplicando Pitágoras se tiene que $RB = 3\sqrt{10}$

5. Sean a y b dos enteros positivos. Si sabemos que son coprimos (el máximo común divisor entre ellos es 1), entonces el máximo valor que puede tener el máximo común divisor de $(a + b)$ y $(a - b)$ es

(a) 1

(b) 2
(c) 4
(d) 8

Solución:

Respuesta correcta: Opción b)

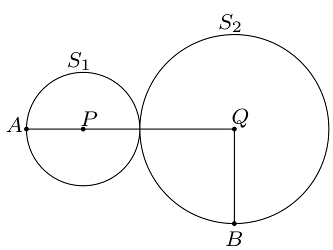
Sea $d := MCD(a+b, a-b)$. Note que entonces $d|(a+b), d|(a-b)$. Por lo tanto, $d|((a+b)+(a-b)$, o sea, $d|2a$. De manera análoga, $d|2b$. Sea p un divisor primo de d. Entonces, $p|d$, por lo cual $p|2a$ y $p|2b$. Como p es primo, divide a 2 o divide a a. Similarmente, de la segunda expresión tenemos que p divide a 2 o divide a b.

Si p no divide a 2, entonces p divide tanto a a como a b, pero eso quiere decir que es un divisor común a a y b. Sin embargo, eso indica que tiene que dividir al máximo común divisor, o sea, a 1, y ningún primo divide a 1. Por lo tanto, p debe dividir a 2.

Este análisis indica que el único divisor primo que puede tener d es 2. Sin embargo, 4 no puede dividir a d, pues en ese caso $4|2a$ y $4|2b$, por lo que $2|a$ y $2|b$, y de nuevo contradiría el hecho de que a y b son coprimos.

En conclusión, el máximo valor que puede tener d es 2 (que ocurre si tanto a como b son impares).

6. En la figura P y Q son los centros de las circunferencias tangentes S_1 y S_2, la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ corta la circunferencia S_1 en A y el radio $\overline{QB}$ es perpendicular a $\overline{PQ}$. Si la suma de las áreas de los círculos es 10π y el área del $\triangle AQB$ es 8, determine la longitud de $\overline{PB}$.



(a) $\sqrt{40}$
(b) $\sqrt{26}$
(c) 5
(d) 6

Solución:

Respuesta correcta: Opción b)

Sean r y R los radios de S_1 y S_2 respectivamente. Como $\pi r^2 + \pi R^2 = 10$, tenemos que $R^2 + r^2 = 10$. Además $(AQB) = 8 \Longrightarrow \dfrac{R(R+2r)}{2} = 8$, por lo que $(2r+R)R = 16$.

Por otra parte, aplicando el Teorema de Pitágoras en $\triangle PBQ$

$$PB = \sqrt{(r+R)^2 + R^2} = \sqrt{r^2 + 2rR + R^2 + R^2} = \sqrt{(r^2 + R^2) + (2r + R)R} = \sqrt{26}$$

7. La cantidad de soluciones (x, n), donde ambos son enteros positivos y n es par, de la ecuación $x^2 + 7 = 2^n$ es
   (a) 1
   (b) 2
   (c) 3
   (d) 0

   Solución:

   Respuesta correcta: Opción $a)$

   Sea $n = 2k$, con k entero positivo. Entonces,

$$x^2 + 7 = 2^{2k} \Rightarrow$$

$$7 = 2^{2k} - x^2 \Rightarrow$$

$$7 = (2^k - x)(2^k + x).$$

   Como 7 es primo, y $2^k + x$ es positivo, entonces la única opción es $1 = 2^k - x$ y $7 = 2^k + x$ (pues $2^k + x > 2^k - x$). Sumando ambas ecuaciones tenemos que $8 = 2^{k+1}$, por lo que $k = 2$. En consecuencia, $x = 3$. Por lo tanto, solo hay una solución, a saber, $(x, n) = (3, 4)$.

8. Sean x_1 y x_2 dos números reales tales que $x_1 \neq x_2$, $3x_1^2 - hx_1 = a$ y $3x_2^2 - hx_2 = a$, con $a > 0$. Una expresión equivalente a $x_1 + x_2$ es
   a) $\dfrac{a}{3}$
   b) $\dfrac{h}{3}$
   c) $\dfrac{-a}{3}$
   d) $\dfrac{-h}{3}$

   Solución:

   Respuesta correcta: Opción $b)$

   Al considerar la ecuación $3x_1^2 - hx_1 = a$ se tiene que $3x_1^2 - hx_1 - a = 0$. Luego, con base en la fórmula general, se tiene que: $x_1 = \dfrac{-(-h) \pm \sqrt{(-h)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-a)}}{2 \cdot 3} = \dfrac{h \pm \sqrt{h^2 + 12a}}{6}$.

En forma análoga, para la ecuación $3x_2^2 - hx_2 = a$ se tiene que $x_2 = \dfrac{h \pm \sqrt{h^2+12a}}{6}$.

Como $x_1 \neq x_2$, si $x_1 = \dfrac{h+\sqrt{h^2+12a}}{6}$ entonces $x_2 = \dfrac{h-\sqrt{h^2+12a}}{6}$.

Así, $x_1 + x_2 = \dfrac{h+\sqrt{h^2+12a}}{6} + \dfrac{h-\sqrt{h^2+12a}}{6} = \dfrac{2h}{6} = \dfrac{h}{3}$.

Otra solución:

$$\begin{aligned}
3x_1^2 - hx_1 = a \ , \ 3x_2^2 - hx_2 = a &\implies 3x_1^2 - hx_1 = 3x_2^2 - hx_2 \\
&\implies 3x_1^2 - 3x_2^2 = hx_1 - hx_2 \\
&\implies 3(x_1^2 - x_2^2) = h(x_1 - x_2) \\
&\implies 3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = h(x_1 - x_2) \\
&\implies 3(x_1 + x_2) = h \\
&\implies (x_1 + x_2) = \frac{h}{3}
\end{aligned}$$

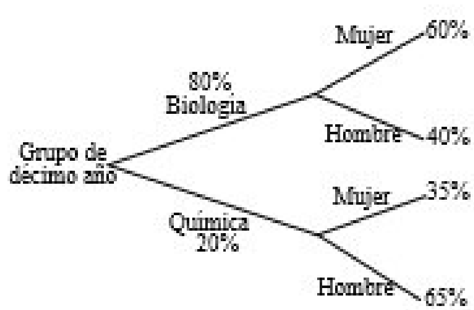
9. En cierto colegio los estudiantes de décimo año pueden optar por cursar como ciencia natural entre biología o química. En uno de los grupos de décimo, 80 % de los estudiantes estudia biología y el resto química; 40 % de los que estudian biología son hombres y, de los que estudian química, 35 % son mujeres. Si se selecciona al azar un estudiante de este grupo de décimo año, la probabilidad de que sea mujer es

   a) 0,39
   b) 0,45
   c) 0,55
   d) 0,61

   Solución:

   Respuesta correcta: Opción $c)$

   Lo descrito en el problema se puede modelar de la manera siguiente:



   De acuerdo con la representación anterior, la probabilidad de que el estudiante seleccionado sea mujer es $(0{,}8) \cdot (0{,}6) + (0{,}2) \cdot (0{,}35) = 0{,}55$.

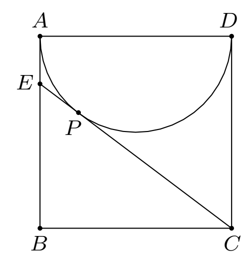
10. Dado el cuadrado $\square ABCD$ de lado 2 y una semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$ que está contenida en él. Sea E un punto tal que $A-E-B$ y $\overline{CE}$ es tangente a la semi-circunferencia, determine el área del $\triangle CBE$

    (a) 1
    (b) $\dfrac{3}{2}$
    (c) 2
    (d) $\dfrac{5}{2}$

    Solución:

    Respuesta correcta: Opción b)

    Considere la figura siguiente en donde P es el punto de tangencia de $\overline{EC}$ con la semi-circunferencia.



$AE = PE$ por ser tangentes desde un punto externo, sea $AE = PE = x$.

$DC = PC$ por ser tangentes desde un punto externo, así$PC = 2$

Entonces $BE = 2 - x$ y $EC = 2 + x$, aplicando Pitágoras al $\triangle EBC$ tenemos que

$$(2-x)^2 + 4 = (2+x)^2 \Rightarrow 4 - 4x + x^2 + 4 = 4 + 4x + x^2 \Rightarrow 4 = 8x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Ahora, el área del $\triangle CBE$ viene dada por $\frac{1}{2} \cdot EB \cdot BC$ es decir $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 = \frac{3}{2}$

11. Si un número entero positivo n tiene exactamente 16 divisores positivos, entonces el producto de esos 16 divisores es

    (a) n^{16}
    (b) n^{8}
    (c) n^{4}
    (d) n^{2}

    Solución:

    Respuesta correcta: Opción b)

Sean $1 = a_1 < a_2 < \cdots, a_{15} < a_{16} = n$ los 16 divisores a estudiar. Note que si a_i es un divisor de n, entonces también n/a_i lo es. O sea, cada divisor tiene una pareja y dicha pareja es única. Note además que $a_1 a_{16} = n$. De igual manera, $a_i a_{17-i} = n$. Entonces

$$\prod_{i=1}^{16} a_i = \prod_{i=1}^{8} n = n^8.$$

12. Si a, b son números reales positivos tales que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{8}{3}, \ a^2 + b^2 = \frac{5}{2},$$

determine el valor de $a \cdot b$

(a) $\frac{3}{8}$

(b) 3

(c) $\frac{3}{4}$

(d) $\frac{8}{3}$

Solución:

Respuesta correcta: Opción c)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{8}{3} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{a+b}{ab} = \frac{8}{3} \\
&\Longrightarrow \quad 3(a+b) = 8ab \\
&\Longrightarrow \quad 9(a+b)^2 = (8ab)^2 \\
&\Longrightarrow \quad 9(a^2 + 2ab + b^2) = 64a^2b^2 \\
&\Longrightarrow \quad 9(\tfrac{5}{2} + 2ab) = 64a^2b^2 \qquad \text{sustituyendo } \ a^2 + b^2 = \frac{5}{2} \\
&\Longrightarrow \quad \tfrac{45}{2} + 18ab = 64a^2b^2 \\
&\Longrightarrow \quad 45 + 36ab = 128a^2b^2 \\
&\Longrightarrow \quad 0 = 128a^2b^2 - 36ab - 45 \quad \text{resolviendo la cuadrática para } ab \\
&\Longrightarrow \quad ab = \tfrac{3}{4} \ \ o \ \ ab = \tfrac{-15}{32}
\end{aligned}$$

Como a, b son números positivos entonces $ab = \frac{3}{4}$

II Parte: Desarrollo **Valor 21 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. Rolando dibuja una serie de 2015 figuras con el siguiente orden:

Si selecciona al azar una figura que está en una posición múltiplo de 5, determine la probabilidad de que esta figura sea un pentágono.

Solución:

Observe que hay un:
Triángulo en las posiciones $1, 7, 13, ..., 1 + 6k$
Cuadrado en las posiciones $2, 8, 14, ..., 2 + 6k$ y $6, 12, 18, ..., 0 + 6k$
Pentágono en las posiciones $3, 9, 15, ..., 3 + 6k$ y $5, 11, 17, ..., 5 + 6k$
Hexágono en las posiciones $4, 10, 16, ..., 4 + 6k$

De esto se puede deducir también que, si se toma un número de la secuencia y se divide por 6, la figura que esté en esa posición quedará determinada por el residuo de esta división de la siguiente manera:

Residuo	*Figura*
0	*Cuadrado*
1	*Triangulo*
2	*Cuadrado*
3	*Pentagono*
4	*Hexagono*
5	*Pentagono*

Tomando esto en cuenta se puede observar un periodo en las figuras obtenidas, debido al periodo de los residuos:

Numero :	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Residuo :	5	4	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0
Figura :	*P*	*H*	*P*	*C*	*T*	*C*	*P*	*H*	*P*	*C*	*T*	*C*

Se observa que por cada grupo de 6 múltiplos consecutivos de 5 hay 2 pentágonos

Finalmente, en 2015 números hay 403 múltiplos de 5, que es la cantidad total de casos y $403 = 67 \cdot 6 + 1$, por lo que se tienen en total $67 \cdot 2 + 1 = 135$ pentágonos de esos 403 casos. Por lo tanto la probabilidad buscada es

$$\frac{135}{403}$$

2. Determine todos los cuadrados perfectos de cuatro cifras de la forma $NNMM$

Solución:

El número $NNMM$ se puede factorizar como

$$\begin{aligned} NNMM &= 10^3N + 10^2N + 10M + M \\ &= 1100N + 11M \\ &= 11 \cdot (100N + M) \\ &= 11 \cdot (N0M) \end{aligned}$$

Luego, el número $N0M$ debe ser divisible por 11 y, de acuerdo con la regla de divisibilidad por 11, como N y M son dígitos su suma no supera la cantidad 18 y esta suma menos cero (dígito en posición par) debe ser múltiplo de 11, por lo que se cumple $N + M = 11$.

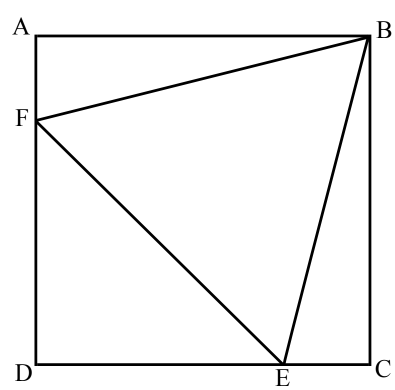
Las únicas posibilidades para que dicha suma se dé son las siguientes:

$$(N, M) \in \{(2,9), (3,8), (4,7), (5,6), (6,5), (7,4), (8,3), (9,2)\}$$

Por los que los candidatos serían:
$209 = 11 \cdot 19$, $308 = 11 \cdot 28$, $407 = 11 \cdot 37$, $506 = 11 \cdot 46$, $605 = 11 \cdot 55$, $704 = 11 \cdot 64 = 11 \cdot 8^2$, $803 = 11 \cdot 73$ y $902 = 11 \cdot 82$.

Así, con $N = 7$ y $M = 4$ se obtiene el número $7744 = 11^2 \cdot 8^2$.

3. En la figura adjunta $\square ABCD$ es un cuadrado y ΔBEF es un triángulo equilátero. Si el área del $\square ABCD$ es un metro cuadrado, determine el área del ΔBEF



Solución:

Si $EC = AF = x$, entonces $DF = DE = 1 - x$. Note que $0 < x < 1$.

El área del ΔBEF se obtiene restando al área del $\square ABCD$ las áreas de los triángulos ΔABF, ΔDFE y ΔCEB.

Luego,

$$\begin{aligned} \text{área del } \Delta BEF &= 1 - \frac{x}{2} - \frac{(1-x)^2}{2} - \frac{x}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(2 - x - x - 1 + 2x - x^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - x^2\right) \end{aligned}$$

Si y denota la medida de cada uno de los lados del ΔBEF, de acuerdo con el teorema de Pitágoras (aplicado a los tres triángulos mencionados anteriormente) se tiene que $x^2+1=y^2=(1-x)^2+(1-x)^2$. De esta manera:

$$\begin{aligned}
& x^2+1=(1-x)^2+(1-x)^2 \\
\Rightarrow\ & x^2+1=2(1-x)^2 \\
\Rightarrow\ & x^2+1=2\left(1-2x+x^2\right) \\
\Rightarrow\ & 0=2-4x+2x^2-x^2-1 \\
\Rightarrow\ & x^2-4x+1=0 \\
\Rightarrow\ & x=\frac{4\pm\sqrt{16-4}}{2}=2\pm\sqrt{3}
\end{aligned}$$

De los valores anteriores, x no puede ser $2+\sqrt{3}$ pues $2+\sqrt{3}>1$; así, $x=2-\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}
\text{área del } \Delta BEF &= \frac{1}{2}\left(1-x^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\left(2-\sqrt{3}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-6+4\sqrt{3}\right) \\
&= -3+2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

XXVIII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

UNA - UCR - TEC - UNED - MEP - MICITT

SOLUCIÓN
SEGUNDA ELIMINATORIA NACIONAL

III Nivel

$10^\circ - 11^\circ - 12^\circ$

2016

Estimado estudiante:

La Comisión Organizadora de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas le saluda y felicita por haber clasificado a la segunda eliminatoria nacional de estas justas académicas. La prueba consta de dos partes: una primera parte de 12 preguntas de selección única, ponderadas con dos puntos cada respuesta correcta, y una segunda parte con 3 preguntas de desarrollo, con un valor de 7 puntos cada solución correcta.

Los resultados de esta eliminatoria se publicarán a partir del viernes 30 de setiembre, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 pts c/u**

1. Considere la sucesión de números $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ definida por $a_{n+1} = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ para $n \geq 2$, con $a_1 = 0$ y $a_2 = 2$. El valor de a_{2016} corresponde a

   (a) $\dfrac{1}{2016}$

   (b) $\dfrac{1}{504}$

   (c) $\dfrac{1}{2}$

   (d) 1

- Opción correcta: (d)
- Solución:

  Se tiene $a_1 = 0$ y $a_2 = 2$, los demás elementos de la sucesión son

$$
\begin{array}{lcccc}
a_3 & = & \dfrac{0+2}{2} & = & 1 \\[2ex]
a_4 & = & \dfrac{0+2+1}{3} & = & 1 \\[2ex]
a_5 & = & \dfrac{0+2+1+1}{4} & = & 1 \\[2ex]
a_6 & = & \dfrac{0+2+1+1+1}{5} & = & 1 \\[2ex]
\vdots & & \vdots & & \\[2ex]
a_{n+1} & = & \dfrac{0+2+\overbrace{1+\cdots+1}^{n-2}}{n} & = & 1 \\[2ex]
\vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

  Por lo tanto $a_3 = a_4 = \cdots = a_{2016} = 1$, entonces $a_{2016} = a_{504} = 1$

2. Sara, Sofía, Nicole y Jesenia nacieron en los meses de enero, marzo, agosto y diciembre del mismo año aunque no necesariamente en ese orden. Al preguntarles por el mes en que nacieron Sara dice que en enero, Sofía indica que nació en marzo, Nicole responde que Jesenia no nació en agosto y Jesenia contesta que Sofía nació en diciembre. Si solo una de ellas miente, entonces con certeza se cumple que

(a) Sofía nació en enero
(b) Jesenia nació en diciembre
(c) Nicole nació en agosto
(d) Sara nació en marzo

- Opción correcta: (c)
- Solución:

  Según los datos del problema las únicas que pueden mentir son Sofía o Jesenia, pues si dicen la verdad, Sofía nacería en dos meses distintos.

  - Si Sofía miente entonces los meses en que nacieron Sara, Sofía, Nicole y Jesenia son respectivamente enero, diciembre, agosto y marzo.
  - Si Jesenia miente entonces los meses en que nacieron Sara, Sofía, Nicole y Jesenia son respectivamente enero, marzo, agosto y diciembre.

  En cualquiera de los dos casos Nicole nació en agosto.

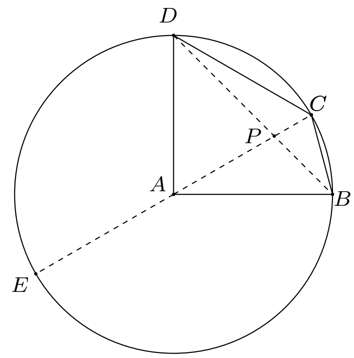
3. Una urna contiene 10 bolas iguales, excepto por las letras que tienen escritas. Dos de ellas tienen la letra O, dos la A, dos la L, dos la M y dos la C. Si se extraen de forma consecutiva seis bolas de la urna, entonces la probabilidad de que la primera bola contenga la letra O, la segunda la letra L, y así sucesivamente hasta formar la palabra OLCOMA, es

   (a) $\dfrac{1}{4725}$
   (b) $\dfrac{1}{15\,625}$
   (c) $\dfrac{1}{31\,250}$
   (d) $\dfrac{1}{1\,000\,000}$

- Opción correcta: (a)
- Solución:

  En este caso la extracción se realiza sin reposición, por lo que cada vez que se saca una bola de la urna el total de bolas que quedan disminuye en una unidad. Debido a esto la probabilidad de extraer seis bolas y formar la palabra OLCOMA es: $\dfrac{2}{10}\cdot\dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{2}{8}\cdot\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{4725}$

4. Considere la figura siguiente en la cual A es el centro de la circunferencia y $\overline{CE}$ es un diámetro. Si $m\widehat{ED}$ y $m\widehat{EB}$ están en la razón $4:5$ y $\angle DAB$ es recto, entonces $m\angle DPA$ es



(a) 30°

(b) 45°

(c) 60°

(d) 75°

- Opción correcta: (d)
- Solución:

  De la razón dada tenemos que $4x+5x = 270°$, asi se tiene que $x = 30°$ y en entonces $m\widehat{BD} = 120°$, de donde $m\angle DCE = 60°$ y entonces $\triangle ADC$ es equilátero y así $m\angle ADC = 60°$. De aquí se tiene que $m\widehat{DC} = 60°$ por ser un ángulo central.

  Entonces $m\widehat{DCB} = m\widehat{DC} + \widehat{BC}$ y así $m\widehat{BC} = 30°$.
  De lo anterior $m\angle BDC = 15°$ por ser ángulo semi-inscrito, y por teorema del ángulo externo $m\angle DPA = 75°$.

5. La cantidad de divisores positivos que tiene el número 100 000 que no son múltiplos de 1000 es

   (a) 9

   (b) 20

   (c) 27

   (d) 36

- Opción correcta: (c)
- Solución:

  Dado que $100\,000 = 2^5 \cdot 5^5$ se tiene que 100 000 tiene $6 \times 6 = 36$ divisores positivos. Por otra parte los divisores de 100 000 que son múltiplos de 1000 son de la forma $2^\alpha \cdot 5^\beta$ donde $3 \leq \alpha \leq 5$ y $3 \leq \beta \leq 5$. En total hay 9 divisores que cumplen esta condición. Por lo tanto hay $36 - 9 = 27$ divisores de 100 000 que no son múltiplos de 1000.

6. Xinia y Yolanda observan la parte más alta de una torre, pero Xinia se encuentra 20 metros atrás de Yolanda. Si el ángulo de elevación de la visual de Xinia es 30° y el de Yolanda es 45°, entonces la altura en metros de la torre es

   (a) $\dfrac{20}{\sqrt{3}+1}$

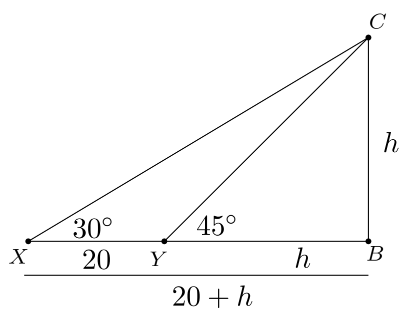
   (b) $\dfrac{20}{\sqrt{3}-1}$

   (c) $20\sqrt{3}$

   (d) $10\sqrt{3}$

- Opción correcta: (b)
- Solución:

  Consideremos la siguiente figura



$\triangle CBY$ es isósceles, por lo que $BC = YB = h$.
$\triangle CBX$ es semiequilátero, por lo que $BX = \sqrt{3}h$

Entonces

$$20 + h = \sqrt{3}h \Rightarrow h = \frac{20}{\sqrt{3}-1}$$

7. Considere los puntos $A-B-C-D-E$ de tal manera que $AC \cdot BE = CD + 7BC$, donde $AB = DE = 1$ y CD excede en dos a DE. La medida de $\overline{BC}$ es

   (a) 1

   (b) 2

   (c) 3

   (d) 4

- Opción correcta: (a)

- Solución:

  Se tiene que $A - B - C - D - E$, entonces por la definión de estar entre, la igualdad dada se puede expresar de la siguiente manera:

$$(AB + BC) \cdot (BC + CD + DE) = CD + 7BC$$

Sea $BC = x$. Como $AB = DE = 1$ y $CD = DE + 2 = 3$, entonces la igualdad se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (1+x)(x+4) &= 3+7x \\ \Rightarrow \quad x+4+x^2+4x &= 3+7x \\ \Rightarrow \quad x^2-2x+1 &= 0 \\ \Rightarrow \quad (x-1)(x-1) &= 0 \\ \Rightarrow \quad x &= 1 \end{aligned}$$

$\therefore BC = 1$

8. La cantidad de números de dos dígitos de la forma ab, donde a y b satisfacen $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, corresponde a

   (a) 5
   (b) 8
   (c) 11
   (d) 13

- Opción correcta: (b)

- Solución:

  De acuerdo a la condición dada, a y b son diferente de cero, entonces se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} - \frac{b}{a} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \\ \frac{a^2 - b^2}{ba} &= \frac{b+a}{ab} \\ a^2 - b^2 &= b + a \\ (a-b)(a+b) &= b+a \\ a - b &= 1 \\ a &= b+1 \end{aligned}$$

Para que la igualda se cumpla, a tiene que tomar valores entre 2 y 9, se tiene que

- Si $a = 2$ entonces $b = 1$
- Si $a = 3$ entonces $b = 2$
- Si $a = 4$ entonces $b = 3$
- Si $a = 5$ entonces $b = 4$
- Si $a = 6$ entonces $b = 5$
- Si $a = 7$ entonces $b = 6$
- Si $a = 8$ entonces $b = 7$
- Si $a = 9$ entonces $b = 8$

Los números encontrados son: 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98. Por lo tanto, la cantidad de números son 8.

9. Si en un $\triangle ABC$, $m\angle ABC = 2m\angle ACB$, $AC = 2BC$ y $AB = 4$, entonces BC es

(a) $\dfrac{1+\sqrt{11}}{2}$

(b) $\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$

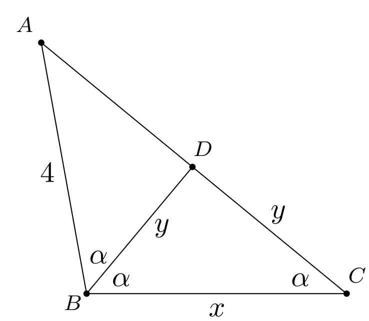
(c) $\dfrac{1+\sqrt{15}}{2}$

(d) $\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$

- Opción correcta: (d)
- Solución:

  Sea $x = BC$, $\alpha = m\angle ACB$ y D la intersección de la bisectriz de $\angle ABC$ con $\overline{AC}$. Llamemos $y = CD$

  Vemos que $\triangle BDC$ es isósceles, por lo que $BD = y$. Además $\triangle ABD \sim \triangle ACB$, pues comparten el ángulo A y tienen un ángulo de medida α.



Por la semejanza se tiene que

$\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{CB} = \dfrac{AD}{AB}$ de donde $\dfrac{4}{2x} = \dfrac{y}{x} = \dfrac{2x-y}{4}$

Entonces, $\dfrac{4}{2x} = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = 2$

Por lo tanto $\dfrac{4}{2x} = \dfrac{2x-y}{4} \Rightarrow \dfrac{2}{x} = \dfrac{2x-2}{4} \Rightarrow x^2 - x - 4 = 0$

Resolviendo esta ecuación se tiene $x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$

10. Al simplificar $\dfrac{2016 \cdot 2017^2 - 3 \cdot 2016^2}{2016^3 + 1}$ se obtiene

    (a) 1
    (b) $\dfrac{1}{2}$
    (c) $\dfrac{2017}{2016}$
    (d) $\dfrac{2016}{2017}$

- Opción correcta: (d)
- Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{2016 \cdot 2017^2 - 3 \cdot 2016^2}{2016^3 + 1} &= \frac{2016 \cdot (2016+1)^2 - 3 \cdot 2016^2}{2016^3 + 1} \\
&= \frac{2016\left[(2016+1)^2 - 3 \cdot 2016\right]}{2016^3 + 1} \\
&= \frac{2016\left[2016^2 + 2 \cdot 2016 + 1 - 3 \cdot 2016\right]}{(2016+1)(2016^2 - 2016 + 1)} \\
&= \frac{2016\left[2016^2 - 2016 + 1\right]}{(2016+1)(2016^2 - 2016 + 1)} \\
&= \frac{2016}{2017}
\end{aligned}$$

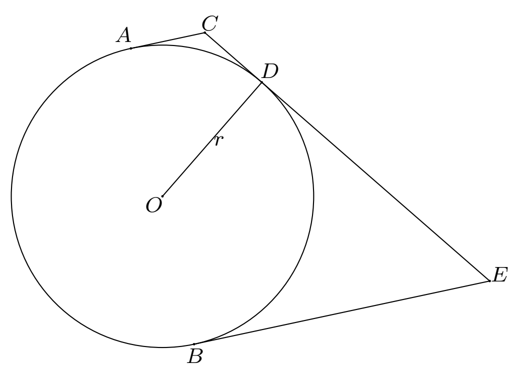
11. Si $a \neq b$, $a^3 - b^3 = 19x^3$ y $a - b = x$, el conjunto de todos los posibles valores para a es

    (a) $\{-3x\}$
    (b) $\{-2x\}$
    (c) $\{3x, -2x\}$
    (d) $\{-3x, 2x\}$

- Opción correcta: (c)
- Solución:

$$\begin{aligned} a^3-b^3=19x^3 \quad &\Rightarrow \quad (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=19x^3 \\ &\Rightarrow \quad x\left(a^2+ab+b^2\right)=19x^3 \\ &\Rightarrow \quad a^2+ab+b^2=19x^2 \\ &\Rightarrow \quad a^2+a(a-x)+(a-x)^2=19x^2 \\ &\Rightarrow \quad a^2+a^2-ax+a^2-2ax+x^2=19x^2 \\ &\Rightarrow \quad 3a^2-3ax-18x^2=0 \\ &\Rightarrow \quad 3\left(a^2-ax-6x^2\right)=0 \\ &\Rightarrow \quad 3(a-3x)(a+2x)=0 \\ &\Rightarrow \quad a=3x \vee a=-2x \end{aligned}$$

12. En la figura adjunta, $\overline{AC}$ y $\overline{BE}$ son paralelas y tangentes a un círculo de radio r, con A y B los puntos de tangencia. Se sabe que $C-D-E$ y que $\overline{CE}$ es otra tangente a la circunferencia con D el punto de tangencia. Si $AC=2$ y $BE=8$, entonces el valor de r es
    (a) 3
    (b) 4
    (c) 5
    (d) 6

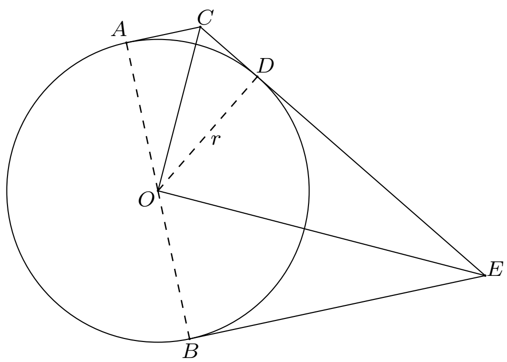


- Opción correcta: (b)
- Solución:

  Dado que $AC=DC=2$, $OA=OD=r$ y $m\angle ODC=m\angle OAC=90°$, entonces $\triangle OAC\cong\triangle ODC$. En forma similar, $BE=DE=8$, $OD=OB=r$ y $m\angle ODE=m\angle OBE=90°$ por lo que $\triangle ODE\cong\triangle OBE$.

Note que $\overline{AB}$ es un diámetro de la circunferencia pues $\overline{AC} \parallel \overline{BE}$ y ambos segmentos son tangentes en A y B, respectivamente, a la circunferencia.

Si se definen $\alpha = m\angle AOC = m\angle DOC$ y $\beta = m\angle DOE = m\angle BOE$ se cumple que $2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ = m\angle COE$.



De lo anterior se concluye que $\triangle COE$ es un triángulo rectángulo, recto en O, donde $\overline{OD}$ es su altura correspondiente con el vértice O. Dado que $\triangle ODC \sim \triangle EOC \sim \triangle EDO \Rightarrow \triangle ODC \sim \triangle EDO$, se tiene que $\dfrac{OD}{ED} = \dfrac{DC}{DO} \Rightarrow \dfrac{r}{8} = \dfrac{2}{r} \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = 4$.

II Parte: Desarrollo **Valor 21 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. Determine la cantidad de divisores no negativos y cuadrados perfectos que tiene el número 1952^{2016}.

   Solución

   $1952 = 2^5 \cdot 61$.

   Un número cuadrado perfecto que divida a 1952^{2016} es de la forma $2^a \cdot 61^b$ donde a y b son enteros pares no negativos que cumplen que $0 \leq a \leq 5 \cdot 2016$ y $0 \leq b \leq 2016$.

   Dado que entre 0 y $5 \cdot 2016$ hay $\dfrac{5 \cdot 2016}{2} + 1 = 5041$ números pares, se tiene que a puede tomar 5041 valores distintos. Por otra parte b puede tomar $\dfrac{2016}{2} + 1 = 1009$ valores distintos. Por lo tanto hay en total $5041 \cdot 1009 = 5\,086\,369$ divisores de 1952^{2016} que son cuadrados perfectos.

2. Determine todos los valores de n, con $n \in \mathbb{N}$, que satisfacen

   $$18 + 22 + 26 + 30 + 34 + \cdots + n = 2016$$

   Solución : La expresión la podemos escribir como:

   $$18 + (18 + 4 \cdot 1) + (18 + 4 \cdot 2) + \cdots + (18 + 4 \cdot k) = 2016$$

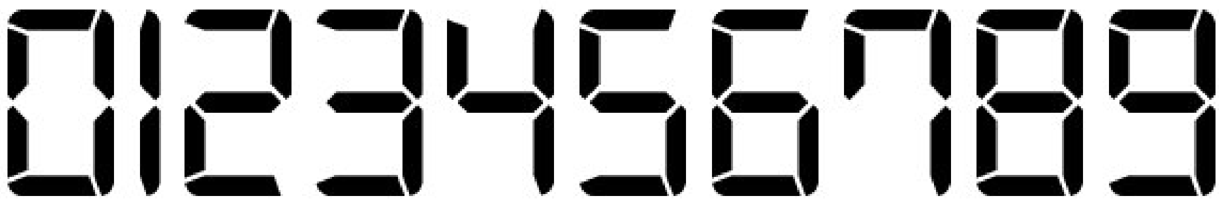
   donde $n = 18 + 4k$, para algún $k \in \mathbb{N}$.

   Entonces

   $$\begin{aligned} 18 + (18 + 4 \cdot 1) + (18 + 4 \cdot 2) + \cdots + (18 + 4 \cdot k) = 2016 \quad &\Rightarrow \quad 18(k+1) + 4(1 + 2 + 3 + \cdots k) = 2016 \\ &\Rightarrow \quad 18(k+1) + 4\frac{k(k+1)}{2} = 2016 \\ &\Rightarrow \quad 18k + 18 + 2k^2 + 2k = 2016 \\ &\Rightarrow \quad 2k^2 + 20k - 1998 = 0 \\ &\Rightarrow \quad k^2 + 10k - 999 = 0 \\ &\Rightarrow \quad (k - 27)(k + 37) = 0 \\ &\Rightarrow \quad k = 27 \;\; o \;\; k = -37 \\ &\Rightarrow \quad k = 27 \;\text{ pues }\; k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

   Por tanto $k = 27$ y $n = 126$.

3. Un automóvil tiene un precio A en dólares, donde A es un entero de cuatro dígitos, escrito con números como los siguientes



Mientras el vendedor se distrae, el comprador gira el rótulo del precio 180° a favor de las manecillas del reloj, y el precio resultante es 1626 dólares menos que el precio original. Determine el valor original del carro.

- Solución:

Al girarse no todos los números representan un número, veamos el 0, 1, 2, 5, 8 representan el mismo número, el 6 y el 9 se invierten y el 3, 4, 7 no se pueden invertir, es decir el rótulo del precio solo puede contener los números 0, 1, 2, 5, 6, 8, 9.
Sea $ABCD$ el precio original y $XYZW$ el precio luego de girar el rótulo, así
$ABCD - XYWZ = 1126$, entonces y $A - X = 1$, y así,

$A = 9$ y $X = 8 \Rightarrow W = 6$ y $D = 8 \Rightarrow D - W = 2(\uparrow\downarrow)$
$A = 8$ y $X = 6 \Rightarrow W = 8$ y $D = 9 \Rightarrow D - W = 1(\uparrow\downarrow)$
$A = 6$ y $X = 5 \Rightarrow W = 9$ y $D = 5 \Rightarrow D - W = 6(\surd)$
$A = 5$ no es posible
$A = 2$ y $X = 1 \Rightarrow W = 2$ y $D = 1 \Rightarrow D - W = 9(\uparrow\downarrow)$
$A = 2$ y $X = 0 \Rightarrow W = 2$ y $D = 0 \Rightarrow D - W = 8(\uparrow\downarrow)$
$A = 1$ y $X = 0 \Rightarrow W = 1$ y $D = 0 \Rightarrow D - W = 9(\uparrow\downarrow)$

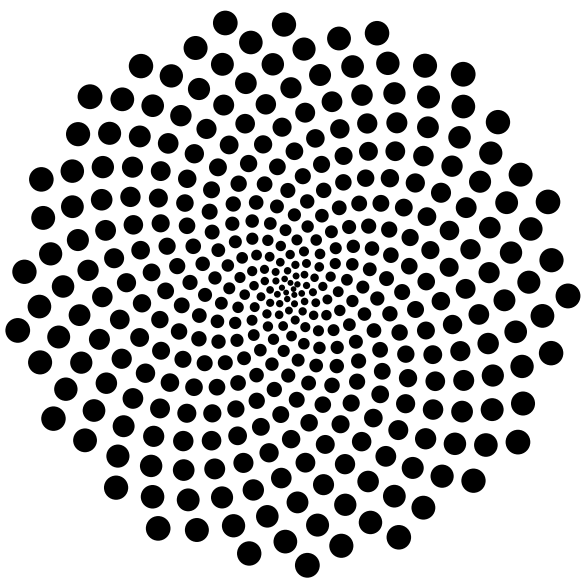
Así tenemos que $C - 1 - z = 2$ y entonces $C - Z = 3$, así

$C = 9$ y $Z = 6 \Rightarrow Y = 6$ y $B = 9 \Rightarrow 6995 - 5669 = 1326(\uparrow\downarrow)$
$C = 8$ y $Z = 5 \Rightarrow Y = 8$ y $B = 5 \Rightarrow 6585 - 5859 = 726(\uparrow\downarrow)$
$C = 6$ no es posible
$C = 5$ y $Z = 2 \Rightarrow Y = 5$ y $B = 2 \Rightarrow 6255 - 5529 = 726(\uparrow\downarrow)$
$C = 2$ y $Z = 9 \Rightarrow Y = 2$ y $B = 6 \Rightarrow 6625 - 5299 = 1326(\uparrow\downarrow)$
$C = 1$ y $Z = 8 \Rightarrow Y = 1$ y $B = 8 \Rightarrow 6815 - 5189 = 1626(\surd)$
$C = 0$ no es posible
Por lo tanto, el precio original es 6815 dólares

XXIX OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

MEP - UNA - UCR - MICITT - UNED - TEC

SOLUCIÓN
SEGUNDA ELIMINATORIA NACIONAL



III Nivel

$(10^{\circ} - 11^{\circ} - 12^{\circ})$

2017

Estimado estudiante:

La Comisión Organizadora de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas le saluda y felicita por haber clasificado a la segunda eliminatoria nacional de estas justas académicas. La prueba consta de dos partes: una primera parte de 12 preguntas de selección única, ponderadas con dos puntos cada respuesta correcta, y una segunda parte con tres preguntas de desarrollo, con un valor de siete puntos cada solución correcta.

Los resultados de esta eliminatoria se publicarán a partir del lunes 02 de octubre, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en las hojas de respuestas que se le han entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en las hojas de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 pts c/u**

1. Considere el cuadrado $\square ABCD$, con $AB = 8$ cm. Una circunferencia tangente a $\overline{BC}$ contiene a los vértices A y D. La longitud, en centímetros, del radio de la circunferencia es

   (a) 4

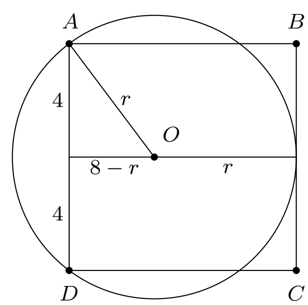
   (b) 5

   (c) 6

   (d) $4\sqrt{2}$

- Opción correcta: b
- Solución:

  Considere la figura



Se tiene que O es el centro de la circunferencia y entonces por Pitágoras se tiene:

$$r^2 = 4^2 + (8 - r)^2 \Rightarrow 16r = 80 \Rightarrow r = 5$$

2. En cada casilla de una cuadrícula de 2×2 se desea escribir los números 1, -1 o 0 de manera que ninguna fila o columna sume cero. La cantidad máxima de maneras en que es posible escribir estos números es

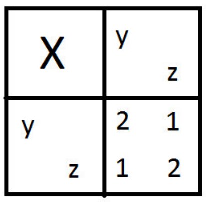
   (a) 9

   (b) 12

   (c) 18

   (d) 36

- Opción correcta: c
- Solución:



Si el número en la primer casilla es x entonces la casilla de la derecha y la de abajo tienen dos posibilidades para no sumar 0, digamos y y z.

Si estas dos fueran la misma entonces la cuarta casilla tiene dos opciones para no sumar cero, pero si son diferentes solo le queda una opción.

Así por cada x hay 6 opciones y como x tiene 3 posibilidades en total hay 18 posibilidades.

3. Sea el $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo, tal que $m\angle ACB = 90°$, $AC = 3$ y $CB = 4$. Sea O un punto tal que $A - O - B$. Si una circunferencia de centro O es tangente a $\overline{AC}$ en Q y a $\overline{BC}$ en P, entonces OP es

   (a) $\dfrac{12}{7}$

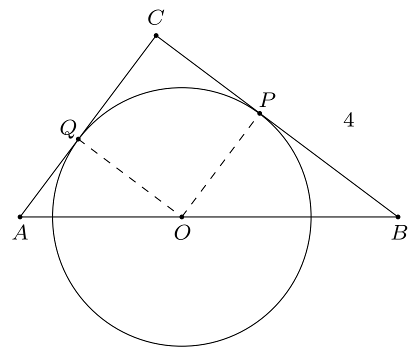
   (b) $\dfrac{7}{12}$

   (c) $\dfrac{9}{7}$

   (d) 6

- Opción correcta: a
- Solución:

  Considere la figura



Se tiene que $\overline{OQ} \perp \overline{AC}$ y $\overline{OP} \perp \overline{CB}$

Sean $OP = OQ = r$, por ser radios.

$$(ABC) = (AOC) + (BOC) \Rightarrow \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{AC \cdot OQ}{2} + \frac{BC \cdot OP}{2} \Rightarrow 6 = \frac{7r}{2} \Rightarrow \frac{12}{7} = r$$

$\therefore OP = \dfrac{12}{7}$

4. Sean a, b y c números reales, con $a \neq c$. Sean

$$P(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 2$$

$$Q(x) = 3x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 2$$

Las condiciones que deben cumplir los números a, b y c para que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ tengan dos raíces comunes son

(a) $a = 3$ y $b = c$

(b) $b = -5$ y $a = -c$

(c) $c = -3$ y $a = b$

(d) $b = 5$ y $c = 2a$

- Opción correcta: b
- Solución:

Para que $P(x) = Q(x) = 0$ se tiene que $P(x)-Q(x) = (a-c)x^3+(c-a)x = (a-c)x(x-1)(x+1) = 0$.

Esto nos dice que las posibles raíces comunes deben ser 0, 1 o -1 y no puede haber una raíz doble común. Ahora $x = 0$ no es raíz de ninguno de los polinomios.

Por otra parte $P(1) = Q(1) = 0$ implica que $a+b+c+5 = 0$ y $P(-1) = Q(-1) = 0$ implica que $-a+b-c+5 = 0$, de donde $b = -5$ y $a = -c$

5. Sean f y g funciones. Si g es lineal, $g(3) = 5$, $f(2) = 7$ y $g(x) \cdot g(x+1) = f(x) + 8$, entonces $f(3)$ es

   (a) 22

   (b) 23

   (c) 27

   (d) 35

- Opción correcta: c

- Solución:

  $f(2) = 7$ y $g(x) \cdot g(x+1) = f(x) + 8$, por lo que $g(2) \cdot g(3) = f(2) + 8$ y $g(2) \cdot g(3) = 15$.

  Como $g(3) = 5$, se tiene que $g(2) = 3$. Luego, como g es lineal, $g(3) = 5$ y $g(2) = 3$, el criterio de g es $g(x) = 2x - 1$.

  Como $g(x) \cdot g(x+1) = f(x) + 8$, se tiene que $(2x-1) \cdot (2(x+1)-1) = f(x) + 8 \Rightarrow 4x^2 - 9 = f(x)$.

  Finalmente, $f(3) = 27$.

6. Considere los números $p = n\left(n^2 - 1\right)$ con n entero y $1 \leq n \leq 2017$. La cantidad de números p que terminan en 0 es

   (a) 1209

   (b) 1210

   (c) 1211

   (d) 1212

- Opción correcta: b
- Solución:

  Como $p = n(n-1)(n+1)$, p es el producto de tres números consecutivos y el último dígito de un producto solo depende de los últimos dígitos de los factores, basta examinar los productos:

$n-1$	n	$n+1$	Termina
1	2	3	6
2	3	4	4
3	4	5	0
4	5	6	0
5	6	7	0
6	7	8	6
7	8	9	4
8	9	10	0
9	10	11	0
10	11	12	0

  Como hay una secuencia de $\{6, 4, 0, 0, 0\}$ y $2015 = 403 \cdot 5$, significa que de $n = 2$ a $n = 2017$ hay $403 \cdot 3 = 1209$ números p que terminan en cero; además, como el primer p es cero, hay 1210 en total.

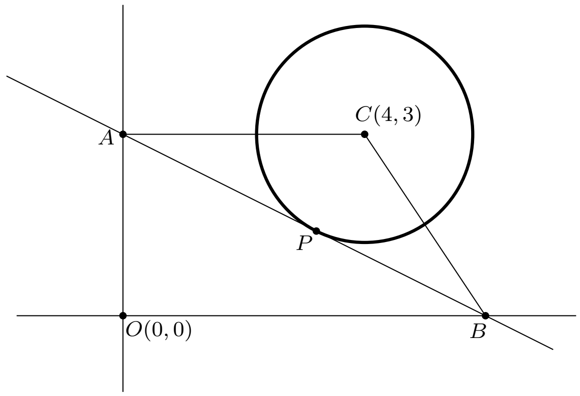
7. En la figura adjunta, A y B están en los ejes de coordenadas, la recta que contiene los puntos A y B tiene ecuación $x+2y=6$, C es el centro de la circunferencia, las coordenadas de C son $(4,3)$, la recta es tangente a la circunferencia en el punto P. El área del círculo de centro C es

   (a) 16π

   (b) $8\pi\sqrt{5}$

   (c) $\dfrac{16\pi}{5}$

   (d) $\dfrac{8\pi\sqrt{5}}{5}$



- Opción correcta: c
- Solución:

  Considerando la ecuación de la recta $x+2y=6$, si $x=0 \Rightarrow y=3$ y si $y=0 \Rightarrow x=6$, por lo que $A\,(0,3)$ y $B\,(6,0)$.

  Como el $\triangle AOB$ es un triángulo rectángulo, aplicando el teorema de Pitágoras se tiene que $AB=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$.

  Así,

$$
\begin{aligned}
& (ABC) = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot PC \\
\Rightarrow\quad & \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{5}\cdot PC = 6 \\
\Rightarrow\quad & PC = \frac{6\cdot 2}{3\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}
\end{aligned}
$$

  El área del círculo de centro C está dada por $\pi\cdot(PC)^2=\dfrac{16\pi}{5}$.

8. Si se tiene que n es un entero positivo y que la fracción $\dfrac{n^2+6n}{n+1}$ es un entero, entonces el valor de esta fracción es

   (a) 0

   (b) 5

   (c) 8

   (d) 15

- Opción correcta: c
- Solución:

  Como la fracción es entera entonces

$$\frac{(n^2+6n)-n(n+1)-5(n+1)}{n+1}=\frac{-5}{n+1}$$

  es un entero.

  Por lo tanto $n+1=5$ y el valor de la fracción es $\dfrac{4^2+6\cdot 4}{5}=8$.

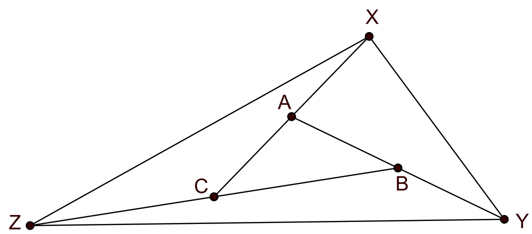
9. Los tres lados del $\triangle ABC$ se prolongan una distancia igual a sus respectivas longitudes, tal y como se observa la figura adjunta. Si el área del $\square XCBY$ es 18 cm^2, entonces el área en cm^2 del $\triangle XYZ$ es

   (a) 28

   (b) 30

   (c) 36

   (d) 42



- Opción correcta: d
- Solución:

  El $\triangle ABC$ tiene la misma base y la mitad de la altura del $\triangle AXY$ (esto con teorema de Tales o semejanza de triángulos al considerar las alturas desde B y desde Y sobre $\overline{AC}$ y $\overline{XC}$, respectivamente); por lo tanto, el $\triangle ABC$ tiene una área de 6 cm^2.

  En forma similar, los triángulos $\triangle ZCX$ y $\triangle ZBY$ tienen áreas iguales a 12 cm^2 cada uno (el doble del área del $\triangle ABC$).

  Por tanto el área del $\triangle XYZ$ es de 42 cm^2.

10. La cantidad máxima de valores enteros que puede tomar n para los cuales la ecuación $x^2 + nx - n = 0$ tenga soluciones enteras es

    (a) 1

    (b) 2

    (c) 3

    (d) 4

- Opción correcta: b
- Solución:

  Utilizando fórmula general, el discriminante de $x^2 + nx - n$ debe cumplior que $n^2 + 4n = k^2$, con k entero.

  Entonces $n^2+4n+4 = k^2+4 \Rightarrow (n+2)^2 = k^2+4 \Rightarrow (n+2)^2 - k^2 = 4 \Rightarrow (n+2+k)(n+2-k) = 4$.

  De lo anterior, se tienen los sistemas:

  $n + 2 + k = 1 \wedge n + 2 - k = 4$ con soluciones $k = \dfrac{-3}{2} \wedge n = \dfrac{1}{2}$

  $n + 2 + k = -1 \wedge n + 2 - k = -4$ con soluciones $k = \dfrac{3}{2} \wedge n = \dfrac{-9}{2}$

  $n + 2 + k = 4 \wedge n + 2 - k = 1$ con soluciones $k = \dfrac{3}{2} \wedge n = \dfrac{1}{2}$

  $n + 2 + k = -4 \wedge n + 2 - k = -1$ con soluciones $k = \dfrac{-3}{2} \wedge n = \dfrac{-9}{2}$

  $n + 2 + k = 2 \wedge n + 2 - k = 2$ con soluciones $k = 0 \wedge n = 0$

  $n + 2 + k = -2 \wedge n + 2 - k = -2$ con soluciones $k = 0 \wedge n = -4$

  De los cuales solo los dos últimos tienen soluciones enteras, con $n = 0$ y $n = -4$, que dan soluciones para x ($x = 0$ y $x = 2$).

  Por lo que la cantidad de valores de n enteros para los cuales la ecuación tiene soluciones enteras es 2.

11. Suponga que $P(x)$ es un polinomio de grado cuatro, con coeficiente principal igual a uno. Se sabe que para un número n, $P(n-2)=1$, $P(n-1)=1$, $P(n)=1$ y $P(n+1)=1$. El valor de $P(n+5)-P(n-4)$ es

    (a) 720

    (b) 360

    (c) 120

    (d) 0

- Opción correcta: a

- Solución:

  Sea $R(x)=P(x)-1$.

  De acuerdo con las hipótesis del enunciado, $n-2$, $n-1$, n y $n+1$ son ceros de $R(x)$; de esta manera:

$$R(x)=(x-(n-2))(x-(n-1))(x-n)(x-(n+1))$$

$$\Rightarrow P(x)=(x-n+2)(x-n+1)(x-n)(x-n-1)+1$$

  Entonces $P(n+5)-P(n-4)$ es

$$(n+5-n+2)(n+5-n+1)(n+5-n)(n+5-n-1)-(n-4-n+2)(n-4-n+1)(n-4-n)(n-4-n-1)=720$$

12. En una casa donde cuidan gatos hay camas para gatos y el cuidador observó que:

    - En cada cama que hay en la casa han dormido seis gatos.
    - Cada gato usó exactamente tres camas distintas.
    - Por cada posible trío de camas hubo exactamente uno y solo un gato que usó las tres camas.

    Se puede afirmar que el total de gatos en la casa es

    (a) 10

    (b) 15

    (c) 18

    (d) 21

- Opción correcta: a
- Solución:

  Si k denota la cantidad de camas, entonces como cada gato usó 3 camas distintas y por cada posible trío de camas hubo exactamente uno y solo un gato que usó las tres camas, por lo que la cantidad de gatos que hay en la casa es $\dfrac{k(k-1)(k-2)}{6}$.

  Como en cada cama que hay en la casa han dormido 6 gatos si relacionaramos las camas con los gatos, cada gato estaría relacionado con tres camas y cada cama con seis gatos, entonces $6k = 3 \cdot \dfrac{k(k-1)(k-2)}{6}$.

  Resolviendo la ecuación anterior se tiene que $k = 0$, $k = -2$ y $k = 5$.

  Como k es un número entero positivo por ser una cantidad, entonces $k = 5$; así, la cantidad de gatos es $\dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10$.

II Parte: Desarrollo **Valor 21 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. Sean x, y y z tres números reales positivos. Si se cumple simultáneamente que:

   - $\left(\sqrt[4]{\frac{x}{y}}+\sqrt[4]{\frac{y}{x}}\right)^2+\left(\sqrt[4]{\frac{x}{z}}+\sqrt[4]{\frac{z}{x}}\right)^2+\left(\sqrt[4]{\frac{z}{y}}+\sqrt[4]{\frac{y}{z}}\right)^2=2017$
   - $\sqrt{4xy}+\sqrt{4xz}+\sqrt{4yz}=4-x-y-z$

   Determine el valor de $\frac{1}{19\sqrt{x}}+\frac{1}{19\sqrt{y}}+\frac{1}{19\sqrt{z}}$

   Solución:

   De la primera expresión tenemos que:

   $\sqrt{\frac{x}{y}}+2+\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{z}}+2+\sqrt{\frac{z}{x}}+\sqrt{\frac{z}{y}}+2+\sqrt{\frac{y}{z}}=2017$

   $\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{x}{z}}\right)+\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{y}{z}}\right)+\left(\sqrt{\frac{z}{x}}+\sqrt{\frac{z}{y}}\right)=2011$

   $\sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}\right)-1+\sqrt{y}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}\right)-1+\sqrt{z}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}\right)-1=2011$

   $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}\right)=2014$

   Por otra parte, $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}$ y con base en la segunda condición se tiene que $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2=4$ lo que implica que
   $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=2$.

   Luego, $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}\right)=2014$

   $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}=1007$

   Finalmente

   $$\frac{1}{19\sqrt{x}}+\frac{1}{19\sqrt{y}}+\frac{1}{19\sqrt{z}}=53$$

2. Considere el $\triangle ABC$, con $BC = 1$, $m\angle ABC = 60°$ y el radio del circuncírculo es $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Si D es otro punto en el circuncírculo del $\triangle ABC$, tal que $\overline{DC}$ pasa por el punto medio de $\overline{AB}$, determine DB.

Solución:

Sean O el centro del circuncírculo, E el punto medio de $\overline{AB}$ y F el punto medio de $\overline{BC}$; note que los triángulos $\triangle BFO$ y $\triangle CFO$ son congruentes por criterio L-L-L.

Así $m\angle BFO = 90°$; además $\triangle BFO$ y $\triangle CFO$ son especiales de $30° - 90° - 60°$, por lo que $m\angle OBA = 30° = m\angle OAB$.

Luego, $m\angle AOB = 120° = m\angle BOC$ y $m\angle COA = 360° - 120° - 120° = 120°$.

Por criterio L-A-L $\triangle AOB$, $\triangle BOC$ y $\triangle COA$ son congruentes, así, $AB = CA = BC = 1$, de donde el $\triangle ABC$ es equilátero de lado 1.

Así, $\overline{CD}$ pasa por O y $OE = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$, por lo que $DE = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. Por Pitágoras $DB = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3. En un torneo de fútbol durante la copa Europa–América, hubo nueve equipos más de Europa que de América. Cada pareja de equipos jugó exactamente una vez y, en total, los equipos europeos ganaron nueve veces tantos partidos como los ganados por los equipos americanos. Si no hubiera empates y el número de partidos ganados por los equipos americanos a los equipos europeos es seis, determine la cantidad de equipos americanos que participaron en dicha copa intercontinental.

Solución:

Sea n el número de equipos americanos y $n+9$ el número de equipos europeos. Los equipos americanos jugaron $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ partidos entre ellos y como no hubo empates ganaron en total $\dfrac{n(n-1)}{2} + 6$ partidos.

Similarmente, los equipos europeos jugaron $\binom{n+9}{2} = \dfrac{(n+8)(n+9)}{2}$ partidos entre ellos y ganaron $n(n+9)-6$ partidos contra equipos americanos, por lo que en total ganaron $\dfrac{(n+8)(n+9)}{2} + n(n+9) - 6$ partidos.

Luego:

$$\begin{aligned}
9\left(\frac{n(n-1)}{2} + 6\right) &= \frac{(n+8)(n+9)}{2} + n(n+9) - 6 \\
\Rightarrow\ 3n^2 - 22n + 24 &= 0 \\
\Rightarrow\ (3n-4)(n-6) &= 0 \\
\Rightarrow\ n = \frac{4}{3} \text{ o } n = 6
\end{aligned}$$

Como n es entero, se concluye que la cantidad de equipos americanos es 6.