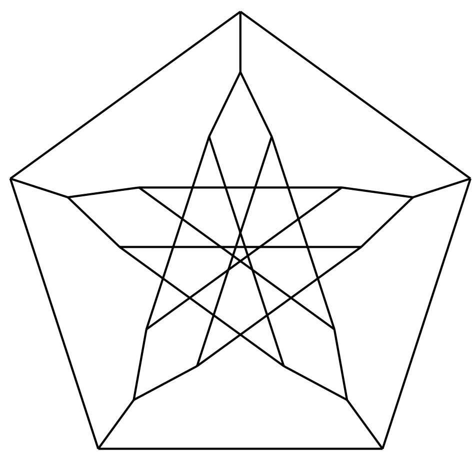
XXX Olimpiada Costarricense de Matemáticas

MEP–UNA–UCR–MICITT–UNED–ITCR

Banco de problemas - Soluciones

Final - Día 1



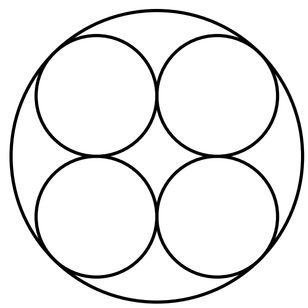
Nivel I

(7°)

2018

GEOMETRÍA

1. En la figura adjunta, los cuatro círculos de menor radio tienen diámetro igual a 4 cm. y cada uno es tangente a sus dos vecinos y al círculo mayor radio que los encierra. Determine el área de la región acotada por los cuatro círculos internos.

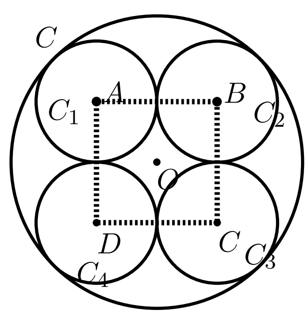


Solución

El radio de cada círculo pequeño mide 2 cm. Denote el círculo grande con C y centro en O, a los círculos pequeños como C_1, C_2, C_3 y C_4 con sus respectivos centros A, B, C y D.

Como el radio de cada círculo pequeño mide 2 cm, entonces $AB = BC = CD = AD = 4$ cm. Por lo anterior, el $\square ABCD$ es un cuadrado. El área del cuadrado es $(ABCD) = 4^2 = 16$ cm^2.

Por otro lado, el área de cada círculo pequeño es $\pi \cdot r^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$ cm^2.



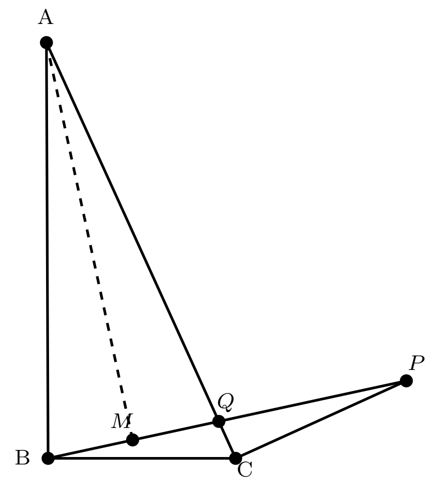
El área del cuadrado tiene una cuarta parte de cada uno de los círculos pequeños, al sumar dichas áreas se obtiene 4π cm^2.

El área de la región acotada por los cuatro círculos pequeños, es el área del cuadrado menos el área de la cuarta parte de cada uno de los círculos pequeños que están en el cuadrado; es decir; $16 - 4\pi$ cm^2.

2. Considere el $\triangle ABC$ recto en B. Sea P un punto, tal que $\angle ACP$ es recto y $\overline{BP}$ interseca a $\overline{AC}$ en Q. Si M es el punto medio de $\overline{BQ}$ y $BC = CP$, determine $m\angle AMB$.

   Solución:

   Considere la figura siguiente:



   Tenemos que $m\angle ACP = 90°$ por ser recto.

   Como $BC = CP$ entonces $\triangle BCP$ es isósceles y, así, $m\angle PBC = m\angle BPC = x$.

   Como $\angle ABC$ es recto, entonces $m\angle ABQ$ es $90° - x$.

   $\triangle QCP$ es recto en C, entonces se tiene que $m\angle PQC = 90° - x$ y, así, $m\angle AQM = 90° - x$ (opuestos por el vértice).

   Entonces $\triangle AQB$ es isósceles, por lo que $\overline{AM} \perp \overline{BQ}$ y, por lo tanto, $m\angle AMB = 90°$.

TEORÍA DE NÚMEROS

1. Considere el número entero $b = 222\ldots222$ conformado por n dígitos y considere el número entero $a = 111\ldots111$ conformado por $2n$ dígitos. Demuestre que el número entero $a - b$ es un cuadrado perfecto.

   Solución:

   Tome en cuenta, que $a = \underbrace{111...111}_{2n \text{ dígitos}}$ es equivalente a $\underbrace{111...1111}_{n \text{ dígitos}}\underbrace{0000...0000}_{n \text{ dígitos}} + \underbrace{111...1111}_{n \text{ dígitos}}$.

   Entonces, tendríamos la siguiente equivalencia:

$$\begin{aligned}
a - b &= \underbrace{111...111}_{2n \text{ dígitos}} - \underbrace{222...222}_{n \text{ dígitos}} \\
&= \underbrace{111...111}_{n \text{ dígitos}}\underbrace{0000...0000}_{n \text{ dígitos}} + \underbrace{111...111}_{n \text{ dígitos}} - \underbrace{222...222}_{n \text{ dígitos}} \\
&= \underbrace{111...111}_{n \text{ dígitos}}\underbrace{0000...0000}_{n \text{ dígitos}} + \underbrace{111...111}_{n \text{ dígitos}} - 2(\underbrace{111...111}_{n \text{ dígitos}}) \\
&= \underbrace{111...111}_{n \text{ dígitos}} \cdot 10^n - \underbrace{111...111}_{n \text{ dígitos}} \\
&= \underbrace{111...111}_{n \text{ dígitos}} (10^n - 1) \\
&= \underbrace{111...111}_{n \text{ dígitos}} (\underbrace{999...999}_{n \text{ dígitos}}) \\
&= \underbrace{111...111}_{n \text{ dígitos}} \cdot 9 (\underbrace{111...111}_{n \text{ dígitos}}) \\
&= 9 (\underbrace{111...111}_{n \text{ dígitos}})^2 \\
&= 3^2 (\underbrace{111...111}_{n \text{ dígitos}})^2 \\
&= (3 \cdot \underbrace{111...111}_{n \text{ dígitos}})^2
\end{aligned}$$

   Por lo tanto, $a - b$ es un cuadrado perfecto.

2. Considere las condiciones siguientes para algún número n:

   (i) n está conformado exactamente por cuatro cifras.

   (ii) Las cifras de n son impares.

   (iii) Al dividir n entre 5, el cociente es también un número entero con todas sus cifras impares.

   Determine la cantidad de números enteros n que existen.

   Solución:

   Supongamos que $n = (abcd)_{10} = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 100 + d$.

   Como d es impar pero a la vez n debe ser divisible entre 5, se puede concluir que $d = 5$. Así que $n = (abc5)_{10}$.

   Partimos entonces del hecho de que $a, b, c \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$

   Al "colocar" la división $(abc5)_{10} \div 5$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{array}{cccc|l} a & b & c & 5 & \underline{\;5\;\;\;} \end{array}$$

   Al dividir el dígito a entre 5 en el primer paso de la división, es claro que tiene que $a > 5$, pues en caso contrario el primer dígito del cociente sería cero, y por lo tanto, el cociente ya no tendría cuatro dígitos. Por lo tanto $a \neq 1$ y $a \neq 3$. Entonces forzosamente $a \in \{5, 7, 9\}$ y el primer dígito del cociente de la división es 1. Supongamos que r_1 es el primer residuo que se obtiene al efectuar $a \div 5$. Una exploración de los tres posibles valores de a, permite deducir que $r_1 \in \{0, 2, 4\}$. Entonces en ese paso, se "baja" el siguiente dígito (b) y la división se ve así:

$$\begin{array}{cccc|l} a & b & c & 5 & \underline{\;5\;\;\;} \\ r_1 & b & & & 1 \end{array}$$

   Ahora correspondería dividir el número de dos cifras $r_1 b$ entre 5. Al explorar las combinaciones de los posibles valores de r_1 y los posibles valores de b, se descartan las combinaciones $01, 03, 21, 23, 41, 43$ porque al dividir entre 5 el siguiente dígito del cociente sería par, lo cual contradice el enuciado. Así que se puede concluir que $b \in \{5, 7, 9\}$.

   Supongamos que q es el siguiente dígito impar del cociente que se obtiene al dividir $r_1 b \div 5$ y que el residuo, es r_2. Por un razonamiento análogo al del paso anterior, se puede deducir que $q \in \{1, 5, 9\}$ y que $r_2 \in \{0, 2, 4\}$. La división en este punto, se vería así:

$$\begin{array}{cccc|l} a & b & c & 5 & \underline{\;5\;\;\;} \\ r_1 & b & & & \;1q \\ & r_2 & c & & \end{array}$$

   Por el mismo razonamiento del paso anterior, al analizar las combinaciones de los posibles valores de r_2 y los posibles valores de c, se descartan las combinaciones $01, 03, 21, 23, 41, 43$ porque al dividir entre 5 el siguiente dígito del cociente sería par, lo cual contradice el enuciado. Así que se puede concluir que $c \in \{5, 7, 9\}$.

   Ahora bien, como los números buscados tendrán como última cifra 5, pero sus tres primeras cifras pueden ser 5, 7 o 9, entonces la cantidad de números enteros que cumplen las condiciones solicitadas es de $3^3 = 27$ enteros.

3. Diana escribió en la pizarra todos los números de cinco cifras que son cuadrados perfectos y Carlos escribió debajo de cada uno de estos números la suma de sus cifras. ¿Cuál es el mayor número que escribió Carlos?

Solución:

Vamos a demostrar que la mayor suma de dígitos es 40 y ocurre para $313^2 = 97\,969$.

Se puede observar que la suma de dígitos de un número de cinco cifras es un valor que puede variar entre 1 y 45.

Todo número tiene una de las siguientes formas: $3k, 3k+1, 3k+2$. Cuando los elevamos al cuadrado se obtienen:

$(3k)^2 = 9k^2$

$(3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$

$(3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$

Es decir, los cuadrados perfectos son múltiplos de 9 o son múltiplos de 3 más 1. Pero los números que son múltiplos de 9 tienen como suma de cifras un valor que es múltiplo de 9 y los números que son múltiplos de 3 más 1 tiene como suma de cifras un valor que es múltiplo de 3 más 1.

En consecuencia, los únicos valores mayores que 40 que se podrían obtener al sumar los dígitos de un cuadrado perfecto son 43 y 45.

Es claro que el único número con suma de dígitos 45 es 99 999, que no es un cuadrado perfecto.

Si la suma de las cifras de un número de cinco cifras fuera 43, sus dígitos serían cuatro nueves y un siete, o en todo caso, dos ochos y tres nueve; los únicos números que cumplen la condición son:

$79\,999, 97\,999, 99\,799, 99\,979, 99\,997; 88\,999, 89\,899, 89\,989, 89\,998, 98\,899, 98\,989, 98\,998, 99\,889,$

$99\,898$, y 988.

Pero un número ubicado entre dos cuadrados perfectos consecutivos no es cuadrado perfecto.

Luego:

$$282^2 = 79524 < 79999 < 80089 = 283^2$$

$$298^2 = 88804 < 88999 < 89401 = 299^2$$

$$299^2 = 89401 < 89899, 89989, 89998 < 90000 = 300^2$$

$$313^2 = 97969 < 97999 < 98596 = 314^2$$

$$314^2 = 98596 < 98899, 98989, 98998 < 99225 = 315^2$$

$$315^2 = 99225 < 99799 < 99856 = 316^2$$

$$316^2 = 99856 < 99889, 99898, 99988, 99979, 99997 < 100489 = 317^2$$

Ninguno de estos quince números es cuadrado perfecto.

Queda demostrado que el mayor valor que puede obtener Carlos al sumar los dígitos de cuadrado perfecto es 40.

RAZONAMIENTO LÓGICO

1. Un juego consiste de una cadrícula de 5×5 y una ficha, que se coloca en la casilla inferior izquierda. Dos jugadores, por turnos, mueven la ficha un único espacio (horizontal, vertical o diagonal) avanzando hacia la casilla superior derecha, gana el jugador que logre llevar la ficha a dicha casilla. Xiomara y Yuri querían jugar una partida, pero cuando Xiomara iba a empezar, Yuri le dijo que era injusto, porque quien empezaba tenía una estrategia ganadora, que mejor cambiaran el tamaño de la cuadrícula.
   Indique si Yuri tiene razón en que existe una estrategia ganadora para el primer jugador para la cuadrícula de 5×5, en caso de existir, explique cuál es dicha estrategia; además, determine todos los valores de m y n para los cuales exista una estrategia ganadora para el primer jugador en un un tablero de m filas y n columnas.

   Nota: Se entiende por *estrategia ganadora* un método de juego que le garantiza la victoria al que lo aplica sin importar lo que haga su oponente.

   Solución:

   Lamemos *casilla ganadora* (G) a aquella en la que si un jugador lleva la ficha ahí se asegura ganar la partida y *casilla perdedora* (P) a aquella en la que si un jugador lleva su ficha ahí, con seguridad perderá. Las primeras casillas que podemos clasificar en ganadoras o perdedoras son las siguientes:

			P	G
			P	P

   Ahora, una casilla en la que el siguiente jugador **deba** mover su ficha a una casilla perdedora es una casilla ganadora y una en la cual el siguiente jugador **pueda** llegar a una casilla ganadora es perdedora. Se tiene entonces la siguiente clasificación

	P	G	P	G
	P	P	P	P
			P	G
			P	P

   Se continúa llenando la cuadrícula, clasificando las casillas con G o P, y se obiene

G	P	G	P	G
P	P	P	P	P
G	P	G	P	G
P	P	P	P	P
G	P	G	P	G

Como inicialmente la ficha ya está colocada en una casilla ganadora, el primer jugador **debe** moverla a una casilla perdedora. A partir de ahí el segundo jugador tiene la estrategia ganadora, moviendo la ficha siempre a una casilla ganadora de las ya señaladas en la cuadrícula anterior. Por lo tanto se concluye que Yuri no tiene razón.

De acuerdo a lo anterior, el primer jugador no tendrá una estrategia ganadora si la casilla inferior izquierda (donde está inicialmente la ficha) es una casilla ganadora; pues este jugador se ve obligado en su primera jugada a moverla a una casilla perdedora, mientras que sí tendrá estrategia ganadora si la ficha se encuentra en unas casilla perdedora.

Se puede observar que la casilla inicial (inferior izquierda) será perdedora si el número de filas de la cuadrícula es par (sin importar el número de columnas) o si el número de filas es impar y el número de columnas es par. Es decir, el primer jugador tendrá una estrategia ganadora para las cuadrículas de tamaño $m \times n$ tales que m sea par (sin importar n), o m sea impar y n sea par.

2. La orientadora y el profesor guía de un colegio del Gran Área Metropolitana, investigan cuál estudiante "hackeo" la cuenta de Instagram de Olcoman.

   Tienen cinco estudiantes sospechosos a quienes llaman y toman la declaración:

   Federico: Fue Alexander.
   Leonel: Yo no fui.
   Randall: No fue Federico.
   Alexander: Fue Erick.
   Erick: Alexander miente.

   Se sabe que solamente un estudiante miente. ¿Es posible determinar al culpable? En caso afirmativo indíquelo.

   Solución:

   a) Si Federico es el culpable, entonces Federico miente, Leonel dice la verdad, Randall miente, Alexander miente y Erick dice la verdad.

   b) Si Leonel es el culpable, entonces Federico miente, Leonel miente, Randall dice la verdad, Alexander miente y Erick dice la verdad.

   c) Si Randall es el culpable, entonces Federico miente, Leonel dice la verdad, Randall dice la verdad, Alexander miente y Erick dice la verdad.

   d) Si Alexander es el culpable, entonces Federico dice la verdad, Leonel dice la verdad, Randall dice la verdad, Alexander miente y Erick dice la verdad.

   e) Si Erick es el culpable, entonces Federico miente, Leonel dice la verdad, Randall dice la verdad, Alexander dice la verdad y Erick miente.

Como solo una persona miente, entonces el culpable es Alexander.

3. Se disponen 2018 presos en fila india y a cada uno se le coloca un sombrero blanco o negro, de forma que cada uno ve el color de los sombreros de los presos que están delante de él en la fila (pero no el propio ni de quienes se encuentran detrás de él en la fila). Se les pregunta a todos los presos por el color de su sombrero, por orden desde el último de la fila hasta el primero. El que acierta logra su libertar y el que no queda en la cárcel.

   Mediante una estrategia adecuada pactada previamente por los presos, ¿cuál es el máximo número de presos que podemos garantizar que se salvan?

   Solución:

   No existe estrategia que permita salvar a todos los presos ya que el último de la fila no tiene información sobre su propio sombrero, es decir, no hay manera de garantizar que el último acierte el color de su sombrero.

   No obstante, se pueden salvar los otros 2017, acordando previamente una forma de proceder que explicamos a continuación:

   Al color negro le asignan el número 1 y al blanco el -1.

   El último de la fila multiplica todos los signos de que se le asignó a los sombreros que ve por delante de él, indicando el signo resultante, note que si hay cantidad impar de sombreros blancos el signo será negativo, si hay cantidad par de sombreros blancos el resultado será positivo. Ante esto, el último de la fila (empezando por el 2018) dice el color correspondiente a su sombrero (puede acertar si tiene suerte pero no se garantiza que acierte).

   Sin embargo el que está delante de él puede darse cuenta si acertó o no, siendo que podría ver los sombreros de los demás delante de él (los 2016 sombreros que puede ver), con lo que sabe el color de su sombrero.

   Análogamente, los siguientes presos realizan el mismo proceso, con lo que averiguan el suyo propio.

   De esta forma, se garantiza que todos se salvan todos (salvo posiblemente el último de la fila).

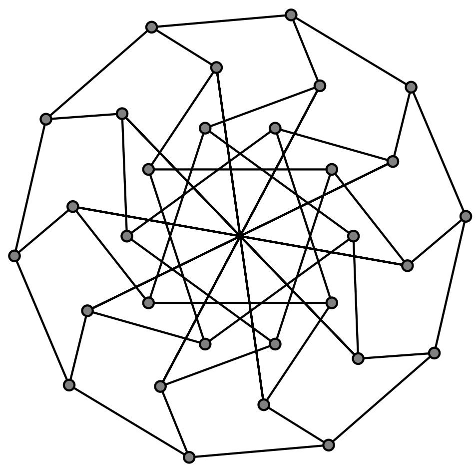
   Nota: el mismo razonamiento vale par una fila de N presos y se garantiza que se salvan $N-1$.

XXX Olimpiada Costarricense de Matemáticas

MEP–UNA–UCR–MICITT–UNED–ITCR

Banco de problemas - Soluciones

Final - Día 1



Nivel II

(8° – 9°)

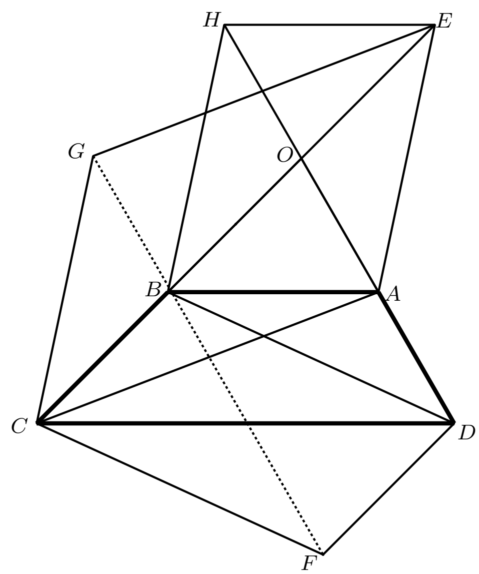
2018

GEOMETRÍA

1. Si $\square ABCD$ es un trapecio de base mayor $\overline{CD}$ en el que O es el punto de intersección de $\overrightarrow{CB}$ y $\overrightarrow{DA}$, el punto E es el simétrico del punto B con respecto al punto O, el punto F es el simétrico del punto B con respecto al punto medio de $\overline{CD}$, el punto G es el simétrico del punto A con respecto al punto medio de $\overline{CE}$, y el punto H es el simétrico del punto A con respecto al punto O. Si $m\angle ADC = 60°$ y $m\angle BCD = 45°$, determine el valor de $m\angle CGF + m\angle CEA$.

   Solución:

   Considere la siguiente figura:

   Como $\overline{AH}$ y $\overline{BE}$ se intersecan en su punto medio y corresponden a las diagonales de $\square ABHE$, entonces dicho cuadrilátero es un paralelogramo. Igualmente ocurre con $\square ACGE$ y $\square BCFD$.

   Se tiene entonces que los segmentos $\overline{CG}$, $\overline{AE}$ y $\overline{BH}$ son paralelos y congruentes, lo mismo que $\overline{CF}$ y $\overline{BD}$, entonces $\angle GCF \cong \angle HBD$ y $\triangle GCF \cong \triangle HBD$.

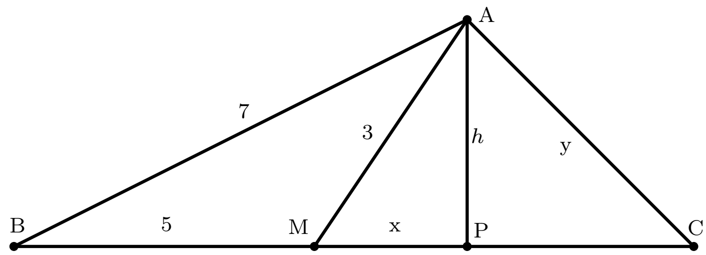
   De esto se tiene que $\angle CGF \cong \angle BHA$, pero también $\angle BHA \cong \angle HAE$ (alternos internos entre paralelas). Entonces $m\angle CGF + m\angle CEA = m\angle HAE + m\angle CEA$.

   Como $m\angle ADC = 60°$ y $m\angle BCD = 45°$, entonces $m\angle COD = 75°$ y $m\angle HAE + m\angle CEA = 75°$ (por teorema del ángulo externo en $\triangle AOE$).

2. Considere el $\triangle ABC$ en el que $AB = 7$ cm. Si M es un punto en $\overline{BC}$, tal que $BM = 5$ cm, $MC = 6$ cm. y $AM = 3$ cm, determine la medida de $\overline{AC}$.

Solución:

Sabemos que $\triangle AMB$ es obtuso pues $7^2 > 3^2 + 5^2$. Si P es el pie de la perpendicular desde A sobre $\overline{BC}$, entonces P está entre M y C.



Sean x, y, h como en la figura. Aplicando el teorema de Pitágoras en los triángulos $\triangle APB$ y $\triangle APM$

$$(x+5)^2 + h^2 = 7^2 \text{ y } h^2 = 3^2 - x^2$$

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera

$$(x+5)^2 + 3^2 - x^2 = 7^2 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$h = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{27}}{2}$$

Como $MC = 6$ cm, entonces $PC = 6 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ cm.
Ahora en el $\triangle APC$

$$y^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{27}}{2}\right)^2 = 27$$

Por lo tanto, $y = \sqrt{27}$ cm.

TEORÍA DE NÚMEROS

1. Sea n un número entero y sean $x = n + 1$, $y = 2n + 1$, $z = 3n + 1$. Demuestre que si y y z son cuadrados perfectos, entonces x es a la vez la suma de los cuadrados de dos números consecutivos y la suma del cuadrado de un número t más el doble del cuadrado de $t + 1$.

   Solución:

   Sean $y = 2n + 1 = a^2$, $z = 3n + 1 = b^2$ para algún a y b enteros.

   Como y es impar entonces a tiene que ser impar; es decir, es de la forma $a = 2u + 1$, con $u \in \mathbb{Z}$, entonces $x = n+1 = \dfrac{a^2 - 1}{2} + 1 = \dfrac{(2u + 1)^2 + 1}{2} = 2u^2 + 2u + 1 = u^2 + u^2 + 2u + 1 = u^2 + (u + 1)^2$.

   Como b^2 no es múltiplo de 3 entonces b no es multiplo de 3.

   Por consiguiente tenemos dos casos:

   - $b = 3v + 1$ entonces $x = n + 1 = \dfrac{b^2 - 1}{3} + 1 = \dfrac{b^2 + 2}{3}$
     $x = \dfrac{(3v + 1)^2 + 2}{3} = 3v^2 + 2v + 1 = 2v^2 + v^2 + 2v + 1 = 2v^2 + (v + 1)^2 = (-v - 1)^2 + 2(-v)^2$
     donde $t = -v - 1$.
   - $b = 3v + 2$ entonces $x = \dfrac{(3v + 2)^2 + 2}{3} = 3v^2 + 2v + 2 = v^2 + 2(v^2 + 2v + 1) = v^2 + 2(v + 1)^2$

2. Sea $n > 2$ un número entero positivo, tal que para $k = 1, 2, \ldots, n-1$, el número $4k^2 + n$ es primo. Demuestre que $n+1$ es una potencia de 2.

   Solución:

   Nótese que como $n+4$ es un número primo mayor que 2, entonces n necesariamente es impar. Asuma que $n+1$ no es una potencia de 2, y considere p un primo impar que lo divide. Note que $p \leq \dfrac{n+1}{2} < n$. Considere $k = \dfrac{p-1}{2}$, entonces

$$4k^2 + n = (p-1)^2 + n = p(p-2) + (a+1)$$

   Por lo tanto, $p|4k^2 + n$, y por ende, $4k^2 + n$ no es primo, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto, $n+1$ es una potencia de 2.

3. Para n un entero positivo, se define u_n como el mínimo entero positivo tal que $n!\,u_n$ es un cuadrado perfecto. Demuestre que hay infinitos valores de n para los cuales $u_n < u_{n+1}$, e infinitos valores de n donde $u_n > u_{n+1}$.

   Solución:

   Sea p un número primo.

   Nótese que $u_{p-1} < u_p$. u_{p-1} claramente no es divisible entre p (y $(p-1)!$ tampoco), y en $p!$ solo se agrega el número p, por primera vez, lo que no completa ningún cuadrado nuevo, y por ende, $u_p = p\,u_{p-1} > u_{p-1}$.

   Por otro lado, nótese que $(2p-1)!$ es divisible por p, pero no por p^2, y por lo tanto u_{2p-1} es divisible por p.

   Por otro lado, $(2p)!$ es divisible por p^2 pero no por p^3. Además, el único factor nuevo es $2p$.

   Por lo tanto $u_{2p} = \dfrac{u_{2p-1}}{p}$ si $(2p-1)!$ contiene un número par de factores 2 en su factorización, y $u_{2p} = \dfrac{u_{2p-1}}{2p}$ si no. En ambos casos, $u_{2p} < u_{2p-1}$.

RAZONAMIENTO LÓGICO

1. En un polígono de $2n$ lados, se colorean los vértices alternadamente con dos colores, negro y blanco. Determine la cantidad de diagonales que tienen extremos de colores diferentes.

   Solución:

   Primero, observe que como hay $2n$ lados, entonces también hay $2n$ vértices.

   Como los colores son alternados, entonces deben existir n vértices negros y n vértices blancos.

   Por otro lado, observe que si un vértice es blanco, entonces sus vecinos son negros; es decir, estos segmentos tienen extremos de diferente color, pero son lados del polígono. Luego, de cada vértice se puede trazar $n-2$ diagonales a un vértice de distinto color. Además, existen $2n$ posibles vértices, lo que da como resultado $2n \cdot (n-2)$ diagonales.

   Finalmente, cada diagonal se está contando dos veces, es decir, la cantidad total es

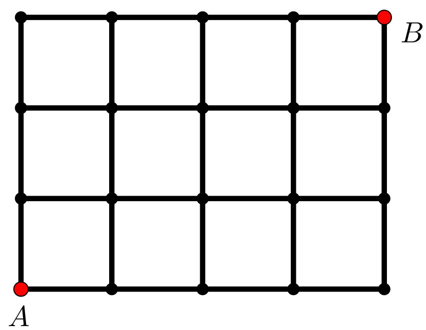
$$\frac{2n \cdot (n-2)}{2} = n(n-2)$$

2. En la figura adjunta se muestra un plano en el que aparecen las calles que delimitan 12 manzanas cuadradas en un barrio de la ciudad.

   En el plano, el Norte corresponde a la parte superior y el Este a la derecha. Jennifer se encuentra en el punto A y debe llegar al punto B, mientras que Steven que se encuentra en el punto B debe llegar al punto A.

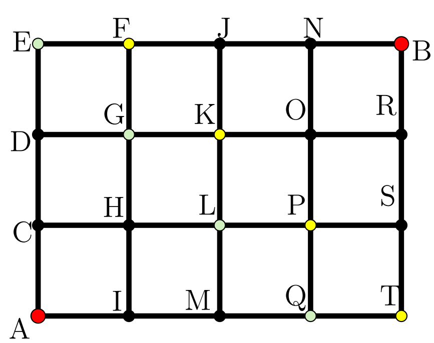
   Tanto Jennifer como Steven han planificado su ruta para recorrer la longitud mínima necesaria para llegar a su destino.

   Asumiendo que parten simultáneamente y que ambos caminan a la misma velocidad constante, determine la probabilidad de que se crucen durante su recorrido.



Solución:

Consideremos las esquinas de las cuadras (intersecciones de las calles) y nombrémoslas así:



Tanto Jennifer como Steven planean utilizar el recorrido mínimo para llegar a su destino. En ambos casos para eso deberán recorrer siete cuadras. Para eso Jennifer solo pude recorrer las calles caminando hacia el Norte y al Este, mientras que Steven deberá recorrerlas caminando hacia el Sur y al Oeste. En las tres primeras cuadras no hay posibilidad de que se crucen. Después de la tercer cuadra Jennifer se encontrará en alguno de los puntos E, G, L o Q, mientras que en ese momento Steven se encontrará en alguno de los puntos F, K, P o T. Analicemos las probabilidades a partir de los puntos después de los cuales se podrían cruzar Jennifer y Steven en su camino.

Caso 1: Jennifer llega al punto E. Como en cada esquina Jennifer tiene dos opciones de donde escoger para llegar al punto E, la probabilidad es $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Ahora para que se cruce con Steven, este deberá encontrarse en el punto F, y la probabilidad de llegar ahí también es $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Una vez que llega al punto E, a Jennifer no le queda otra alternativa que dirigirse al punto F, pero Steven podría moverse hacia el punto E o hacia el punto G, por lo que la probabilidad de que Steven y Jennifer se encuentren en el segmento de la calle que une E y F es entonces: $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^7}$.

Caso 2: El caso en el que Jennifer llega al punto Q y Steven al punto T es análogo al anterior, y por lo tanto, la probabilidad de que Steven y Jennifer se encuentren en el segmento de la calle que une T con Q es también: $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^7}$.

Caso 3: El caso en el que Jennifer llega al punto Q y Steven al punto P. La probabilidad de que Jennifer llegue a Q es de $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. La probabilidad de que Steven llegue a P es de $\frac{3}{8}$, porque hay tres maneras de llegar hasta ahí. Así que la pribabilidad de que se encuentren en el segmento de la calle que une Q con P es de $\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2^8}$.

Caso 4: Jennifer llega al punto G. La probabilidad de que esto suceda es $3 \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{3}{8}$ porque hay tres maneras de llegar hasta ahí, teniendo dos opciones para doblar en cada esquina. En este caso, para que Jennifer se cruce con Steven, este último deberá haber llegado a los puntos F o K. Analicemos ambas situaciones:

a. *Steven está en el punto F*: Steven llega al punto F con una probabilidad de $\frac{1}{8}$. En ese caso se cruzarían en el segmento de la calle que une F con G. Steven en ese caso tendría que escoger una de dos opciones y de igual manera Jennifer. Así que la probabilidad de que se crucen es $\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2^8}$.

b. *Steven está en el punto K*: Steven llega al punto K con una probabilidad de $\frac{3}{8}$ porque hay tres maneras de llegar hasta ahí, teniendo dos opciones para doblar en cada esquina. Entonces se cruzarían en el segmento de la calle que une G con K, pero solo si Jennifer y Steven escogen una de las dos posibilidades de movimiento que tienen. Así la probabilidad de que se crucen en esa calle es $\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2^8}$.

Caso 5: Jennifer llega al punto L. La probabilidad de que esto suceda es $3 \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{3}{8}$ porque hay tres maneras de llegar hasta ahí, teniendo dos opciones para doblar en cada esquina. En este caso, para que Jennifer se cruce con Steven, este último deberá haber llegado a los puntos P o K. Analicemos ambas situaciones:

a. *Steven está en el punto P*: Steven llega al punto P con una probabilidad de $\frac{3}{8}$ porque hay tres maneras de llegar hasta ahí, teniendo dos opciones para doblar en cada esquina. En ese caso se cruzarían en el segmento de la calle que une L con P. Steven tendría que escoger una de dos opciones y de igual manera Jennifer. Así que la probabilidad de que se crucen es $\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2^8}$.

b. *Steven está en el punto K*: Steven llega al punto K con una probabilidad de $\frac{3}{8}$ porque hay tres maneras de llegar hasta ahí, teniendo dos opciones para doblar en cada esquina. Entonces se cruzarían en el segmento de la calle que une L con K, pero solo si Jennifer y Steven escogen una de las dos posibilidades de movimiento que tienen. Así la probabilidad de que se crucen en esa calle es $\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2^8}$.

De esta manera la probabilidad de que Jennifer y Steven se crucen en su camino es

$$\frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^7} + \frac{3}{2^8} + \frac{3}{2^8} + \frac{9}{2^8} + \frac{9}{2^8} + \frac{9}{2^8} = \frac{37}{256}$$

3. Considere la sucesión infinita de números:

$$1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 9,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 17,\ 19,\ 21,\ 23,\ 25, \ldots$$

La sucesión se construyó colocando el primer impar (1), luego los dos pares siguientes $(2,\ 4)$, luego los tres impares que siguen al último número par colocado $(5,\ 7,\ 9)$, luego los cuatro pares que siguen al último número impar colocado $(10,\ 12,\ 14,\ 16)$, luego los cinco impares que siguen al último número par colocado $(17,\ 19,\ 21,\ 23,\ 25)$ y así sucesivamente.

Determine cuál es el número par más cercano a 1998 que aparece en la sucesión y que posición ocupa ese número en la misma.

Solución:

Si se colocan los números en un arreglo triangular, colocando en filas diferentes pares e impares, según la regla que define la sucesión, se obtiene:

$$\begin{array}{lllll}
1 & & & & \\[1em]
2 & 4 = 2^2 & & & \\[1em]
5 & 7 & 9 = 3^2 & & \\[1em]
10 & 12 & 14 & 16 = 4^2 & \\[1em]
17 & 19 & 21 & 23 & 25 = 5^2
\end{array}$$

Dado el patrón que se observa, conviene identificar cuál es el cuadrado perfecto más cercano a 1998 sin sobrepasarlo.

Se observa que, $43^2 = 1849,\ \ 44^2 = 1936$ mientras que $45^2 = 2025$.

Por lo tanto, hay que inferir cómo serán las filas correspondientes en la sucesión.

La prolongación del acomodo triangular de los valores de la sucesión (con la indicación del número de cada fila) se vería así:

Fila # 1:	1						
Fila # 2:	2	$4 = 2^2$					
Fila # 3:	5	7	$9 = 3^2$				
Fila # 4:	10	12	14	$16 = 4^2$			
Fila # 5:	17	19	21	23	$25 = 5^2$		
			...				
Fila # 44:	1850		...		$1896 = 44^2$		
Fila # 45:	1937		...			$2025 = 45^2$	
Fila # 46:	2026		...				$2116 = 46^2$

Note que en la sucesión, el último número par mayor que 1998 es 1896 (entre ellos hay una diferencia de 102 unidades) y el siguiente número par que aparece en la sucesión que es mayor que 1998 es 2026 (entre ellos hay una diferencia de 28 unidades). Por lo tanto, el número par en la sucesión que se encuentra más cercano a 1998 es 2026.

Para determinar la posición que ocupa el número 2026 en la sucesión, se debe tomar en cuenta que en cada fila se va incrementando la cantidad de elementos en una unidad. Por lo tanto, la cantidad total de términos de la sucesión hasta la fila n está dada por la expresión $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Al ser 2026 el primer elemento de la fila # 46, podemos calcular su posición a partir del total de términos hasta la fila # 45 más una unidad. Así, la posición del número 2026 en la sucesión corresponde a

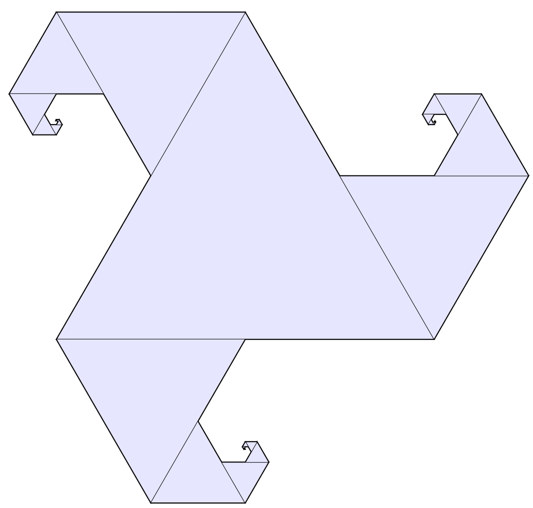
$$\frac{45(45+1)}{2} + 1 = \frac{45 \cdot 46}{2} + 1 = 45 \cdot 23 + 1 = 1035 + 1 = 1036$$

XXX Olimpiada Costarricense de Matemáticas

MEP–UNA–UCR–MICITT–UNED–ITCR

Banco de problemas - Soluciones

Final - Día 1



Nivel III

(10° – 11° – 12°)

2018

GEOMETRÍA

1. Sea O el centro de la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$, y sea P un punto cualquiera sobre $\overline{BC}$ ($P \neq B$ y $P \neq C$).

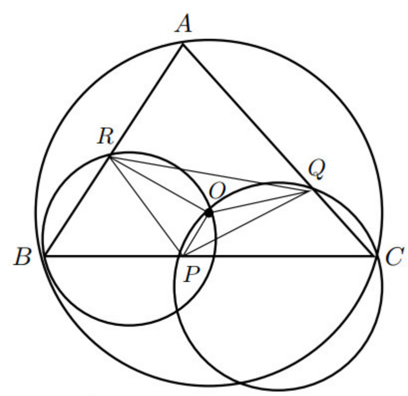
   Suponga que la circunferencia circunscrita al $\triangle BPO$ corta al $\overline{AB}$ en R ($R \neq A$ y $R \neq B$) y que la circunferencia circunscrita al $\triangle COP$ corta al $\overline{CA}$ en el punto Q ($Q \neq C$ y $Q \neq A$).

   a) Demuestre que $\triangle PQR \sim \triangle ABC$ y que O es ortocentro de $\triangle PQR$.

   b) Demuestre que las circunferencias circunscritas a los triángulos $\triangle BPO$, $\triangle COP$ y $\triangle PQR$ son todas de igual radio.

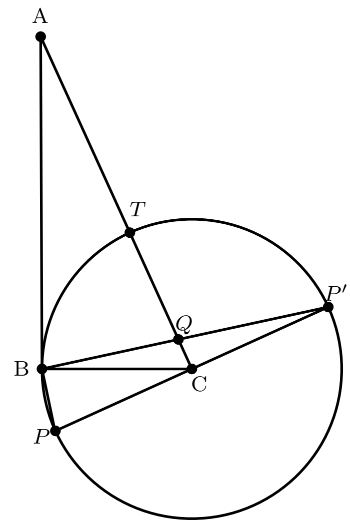
   Solución:

   Primero veamos que $\square OQAR$ es un cuadrilátero cíclico. Como $\square ORBP$ y $\square OPCQ$ son cíclicos, se tiene que $m\angle ROP = 180° - m\angle B$, $m\angle QOP = 180° - m\angle C$.
   Luego, $m\angle ROQ = 360° - m\angle ROP - m\angle QOP = m\angle B + m\angle C = 180° - m\angle A$, y por lo tanto $\square OQAR$ es cíclico.
   Veamos ahora que $m\angle P = m\angle A$. Como $\square ORBP$ es cíclico, $m\angle OPR = m\angle OBR = m\angle OAB$, y como $\square OPCQ$ es cíclico, $m\angle OPQ = m\angle OCQ = m\angle OAQ$. Luego, $m\angle P = m\angle OPR + m\angle OPQ = m\angle OAB + m\angle OAQ = m\angle A$.
   Análogamente, $m\angle Q = m\angle B$ y $m\angle R = m\angle C$. Por lo que los triángulos $\triangle PQR$ y $\triangle ABC$ son semejantes. Como $\square OQAR$ es cíclico se tiene que $m\angle OQR = m\angle OAR = 90° - m\angle C$, y como $m\angle PRQ = m\angle C$, $\overline{QO}$ es perpendicular a $\overline{RP}$.
   En forma similar, $\overline{RO}$ es perpendicular a $\overline{PQ}$, por lo que O es el ortocentro del $\triangle PQR$.

   Note que los radios de las circunferencias circunscritas a los triángulos $\triangle BPO$ y $\triangle COP$ son iguales, ya que dichas circunferencias tienen como cuerda común a $\overline{PO}$ y se tiene que $m\angle OBP = m\angle OCP$. De igual manera, las circunferencias circunscritas a los triángulos $\triangle BPO$ y $\triangle PQR$ tienen el mismo radio, ya que estas últimas tienen la cuerda $\overline{PR}$ en común y los ángulos $\angle RBP$ y $\angle PQR$ son congruentes.

2. En la figura adjunta, el punto C es el centro de la circunferencia, $\overline{AB}$ es tangente a la circunferencia, $P - C - P'$ y $\overline{AC} \perp \overline{PP'}$. Si $AT = 2$ cm. y $AB = 4$ cm, determine BQ.



Solución:

$\triangle BCP$ es isósceles ($\overline{BC}$ y $\overline{PC}$ radios), entonces $m\angle BPC = m\angle PBC = x$.

$\angle PBP'$ es recto (inscrito en el diámetro $\overline{PP'}$), entonces $m\angle CBP' = 90° - x$.

$\triangle BCP'$ es isósceles ($\overline{BC}$ y $\overline{P'C}$ radios), entonces $m\angle CP'B = 90° - x$.

$\angle CBP'$ y $\angle ABP'$ son complementarios, entonces $m\angle ABP' = x$.

$\triangle QCP'$ es rectángulo, así $m\angle CQP' = x$ y $m\angle AQB = x$ (opuestos por el vértice).

Luego, $\triangle ABQ$ es isósceles, por lo que $AB = AQ$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al $\triangle ABC$ se tiene que $16 + r^2 = (r + 2)^2$ de donde $r = 3$ cm. y $AC = 5$ cm; ahora, como $AC = AQ + QC$, entonces $QC = 1$ cm. y $TQ = 2$ cm.

Aplicando el teorema de Pitágoras al $\triangle QCP'$, se tiene que $QP' = \sqrt{10}$ cm.

Por potencia del punto Q respecto a la circunferencia se tiene que $BQ \cdot \sqrt{10} = 2 \cdot 4$ y así $BQ = \dfrac{4\sqrt{10}}{5}$ cm.

ÁLGEBRA

1. Sean a, b, c y d números reales. Las seis sumas de dos números distintos de los cuatro anteriores dan como resultado 117, 510, 411, 252, x y y, sin orden en particular.

   Determine el máximo valor posible de $x + y$.

   Solución:

   Observe que las sumas $(a+b)+(c+d)$, $(a+c)+(b+d)$, $(a+d)+(b+c)$ tienen todas el mismo valor. Esto significa que es posible agrupar los seis valores 117, 510, 411, 252, x y y en pares, de modo que las sumas sean todas iguales.

   No es posible agrupar en pares los números 117, 510, 411, 252, de modo que se cumpla lo anterior. Esto significa que x y y no forman uno de estos pares, entonces existen dos de los números conocidos que forman un par, y los otros dos forman pares con x y y respectivamente.

   Sea S el resultado de la suma común, entonces al sumar las seis cantidades el resultado debe ser igual a $3S$. Este total es $117 + 510 + 411 + 252 + x + y = 1290 + x + y = 3S$.

   Luego, $x + y = 3S - 1290$, y entonces maximizar $x + y$ es equivalente a maximizar S. Como S es igual a la suma de dos de los valores 117, 510, 411, 252, entonces lo más grande que puede ser S es $510 + 411 = 921$, en cuyo caso $x + y = 3S - 1290 = 3 \cdot 921 - 1290 = 1473$. Una solución posible, suponiendo que $a < b < c < d$, se puede obtener al plantear el sistema

$$\begin{cases} a + b = 117 \\ a + c = 252 \\ b + c = 411 \\ a + d = 510 \end{cases}$$

   cuya solución es $a = -21$, $b = 138$, $c = 273$ y $d = 531$.

2. Determine la suma de las raíces reales de la ecuación

$$x^2 - 8x + 20 = 3\sqrt{x^2 - 8x + 30}$$

Solución:

Sea $u = x^2 - 8x + 20$. Entonces

$$\begin{aligned} u = 3\sqrt{u+10} \quad &\Rightarrow \quad u^2 = 9(u+10) \\ &\Rightarrow \quad u^2 - 9u - 90 = 0 \\ &\Rightarrow \quad u = -6 \quad \text{o} \quad u = 15 \end{aligned}$$

Como u debe ser mayor o igual que cero entonces se descarta $u = -6$. Para $u = 15$ se tiene que

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 20 = 15 \quad &\Rightarrow \quad x^2 - 8x + 5 = 0 \\ &\Rightarrow \quad x = 4 - \sqrt{11} \quad \text{o} \quad 4 + \sqrt{11} \end{aligned}$$

Es decir, las raíces reales de la ecuación son $x_1 = 4 - \sqrt{11}$ y $x_2 = 4 + \sqrt{11}$, luego, $x_1 + x_2 = 4 - \sqrt{11} + 4 + \sqrt{11} = 8$.

3. Si $x \in \mathbb{R} - \{-7\}$, determine el menor valor de la expresión $\dfrac{2x^2+98}{(x+7)^2}$.

   Solución:

   Completando cuadrados

$$\frac{2x^2+98}{(x+7)^2} = \frac{2(x^2+14x-14x+49)}{(x+7)^2} = \frac{2(x+7)^2}{(x+7)^2} - \frac{28x}{(x+7)^2} = 2 - \frac{28x}{(x+7)^2}$$

   Por otro lado, como $0 \leq (x-7)^2$ se tiene que $0 \leq x^2 - 14x + 49$, es decir

$$28x \leq x^2 + 14x + 49 = (x+7)^2$$

   Por lo tanto $\dfrac{28x}{(x+7)^2} \leq 1$

   Así, $\dfrac{2x^2+98}{(x+7)^2} = 2 - \dfrac{28x}{(x+7)^2} \geq 2 - 1 = 1$

RAZONAMIENTO LÓGICO

1. En un tablero 30×30 se enumeran tanto las filas del 1 al 30 como las columnas; además, a cada casilla se le asigna el número ij, donde la casilla está en la fila i y en la columna j.

   Se escogen n columnas y m filas, donde $1 < n$ y $m < 30$, y se pintan de azul las casillas que están simultáneamente en alguna de las filas y en alguna de las columnas seleccionadas. Se pintan de rojo las demás.

   (a) Demuestre la suma de los números en las casillas azules no puede ser primo.

   (b) ¿Puede ser primo el resultado de la suma de los números en las casillas rojas?

   Solución:

   (a) Asuma que se tomaron las filas $a_1, \ldots, a_m$ y las columnas $b_1, \ldots, b_n$. Por ende, los números en las casillas azules corresponden a todas las combinaciones $a_i b_j$ con $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$. Es sencillo corroborar que la suma de estas sería

   $$S = (a_1 + \cdots + a_m)(b_1 + \cdots + b_n).$$

   Como S es el producto de dos enteros, cada uno de ellos la suma de enteros positivos, S no puede ser primo.

   (b) Sí puede ser. Por ejemplo, si se escogen las filas $2, \ldots, 30$ y las columnas $2, \ldots, 30$, entonces las casillas rojas corresponden a la primera columna, y a la primera fila.

   Por lo tanto, su suma T sería $T = 2(1 + \cdots + 30) - 1 = 929$, que en efecto es un número primo.

2. Arnulfo y Berenice juegan el siguiente juego: Inicia uno de los dos escribiendo un número del 1 al 30; el otro escoge un número del 1 al 30 y se lo suma al número inicial; el primer jugador escoge un número del 1 al 30 y se lo suma al resultado anterior; continúan de la misma manera hasta que alguno logre sumar 2018. Cuando Arnulfo iba a iniciar, Berenice le dijo que era injusto, porque quien empezaba tenía una estrategia ganadora, que mejor cambiaran los números. Entonces se hicieron la siguiente pregunta:

   Sumando números escogidos desde 1 hasta a, hasta llegar al número b, ¿qué condiciones deben cumplir a y b para que el primer jugador no tenga estrategia ganadora?

   Indique si Arnulfo y Berenice tienen razón y responda la pregunta hecha por ellos.

   Solución:

   Se observa que si un jugador llega al número 1987, el jugador siguiente perderá, porque de los números del 1 al 30 aun no puede llegar a 2018 pero lo menos que puede sumarle es 1, con lo que el otro jugador ganará. Más concretamente, si uno suma k el otro debe sumar $31 - k$ para llegar a 2018 pues $1987 + k + 31 - k = 1987 + 31 = 2018$. Podemos decir entonces que 1987 es una posición ganadora.

   A partir de esto se observa que todos los números de la forma $2018 - 31n$ serán posiciones ganadoras y la estrategia consiste en sumar, en cada jugada, el complemento a 31 de lo que sume el otro jugador para mantenerse en dichas posiciones ganadoras.

   Además, como $2018 = 31 \cdot 65 + 3$, vemos que $3 = 2018 - 31 \cdot 65$ es la primera posición ganadora. Es decir, la estrategia ganadora la tiene el primer jugador escogiendo inicialmente el número 3 y a partir de ahí sumar el complemento a 31 de lo que sume el segundo jugador.

   Observamos que si 2018 fuese múltiplo de 31 entonces el primer jugador no tendría estrategia ganadora, pues en su primera jugada debe escoger un número que no está en posición ganadora.

   En general, para que el primer jugador no tenga estrategia ganadora, b debe ser múltiplo de $a+1$.

3. Se tienen 10 puntos en una circunferencia y se trazan todos los segmentos posibles en los cuales dos de estos puntos son los extremos. Determine la probabilidad de que al seleccionar dos segmentos de manera aleatoria, estos se corten en algún punto (podría ser en la circunferencia).

   Solución:

   Note que hay $\binom{10}{2} = 45$ segmentos, por lo que se pueden escoger dos de ellos de $\binom{45}{2} = 990$ formas.

   Si se cortan dentro de la circunferencia es lo mismo que escoger cuatro puntos de los diez y entre ellos habría una única opción para que los segmentos formados por ellos se corten en el interior.

   Si se cortan en la circunferencia uno de estos puntos debe ser extremo de ambos segmentos, y escogiendo tres de estos puntos habría 3 posibilidades para formar los segmentos que se intersequen en uno de sus vértices.

   Así, la cantidad total será $\binom{10}{4} + 3\binom{10}{3} = 570$ formas.

   Por lo tanto, la probabilidad será $\dfrac{570}{990} = \dfrac{19}{33}$.

4. Jordan se encuentra en el centro de un círculo cuyo radio mide 100 metros y puede moverse un metro a la vez; sin embargo, hay un gigante que en cada paso lo puede obligar a moverse en la dirección opuesta a la que él escogió (no significa devolverse al lugar de partida, sino avanzar pero en la dirección opuesta a la escogida). Determine el número mínimo de pasos que debe dar Jordan para salir del círculo.

   Solución:

   Para poder salir del círculo Jordan debe seguir el siguente proceso.

   En el primer paso es indiferente la dirección que Jordan escoja, siempre estará a 1 metro del centro del círculo.

   Sea O el centro del círculo y P la posición actual de Jordan, para que el cambio de dirección a la que le puede obligar el gigante no retrace el avance de Jordan, este debe tomar la direccíon de la perpendicular a $\overline{OP}$; así, por el teorema de Pitágoras siempre estará más lejos del centro en la nueva posición que en la posición anterior (P).

   Aplicando este procedimiento tenemos que Jordan después de su segundo movimiento se encuentra a una distancia $\sqrt{2}$ del centro O, después del tercer movimiento se encuestra a $\sqrt{3}$ del centro O, y en general después de n movimientos se encontrará a una distancia $\sqrt{n}$ del centro O.

   Para que Jordan llegue al borde del círculo debe recorrer 100 metros es decir

   $$\sqrt{n} = 100 \Rightarrow n = 100^2 \Rightarrow n = 10\,000$$

   Por lo que Jordan debe dar al menos 10 001 pasos para salir del círculo.

5. La compañía *Matini* sacó un álbum especial con las banderas de los 12 países que compiten en la Copa CONCACAM de Matemática. Cada sobre de postales tiene dos banderas escogidas aleatoriamente. Determine el mínimo número de sobres que se necesitan abrir para que la probabilidad de tener una bandera repetida sea 50 %.

   Solución:

   La pregunta es equivalente a averiguar el número mínimo de sobres para que haya probabilidad menor a 50 % de que todas las banderas sean distintas.

   Entonces, si p_k es la probabilidad de que abriendo k sobres todas las banderas son distintas, entonces:

$$p_1 = \frac{12}{12} \times \frac{11}{12} = \frac{11}{12} \approx 92\,\%$$
$$p_2 = \frac{12}{12} \times \frac{11}{12} \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{12} = \frac{55}{72} \approx 76\,\%$$
$$p_3 = \frac{12}{12} \times \frac{11}{12} \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{12} \times \frac{8}{12} \times \frac{7}{12} = \frac{385}{1296} \approx 30\,\%$$

   Por lo tanto, el número buscado es tres sobres.