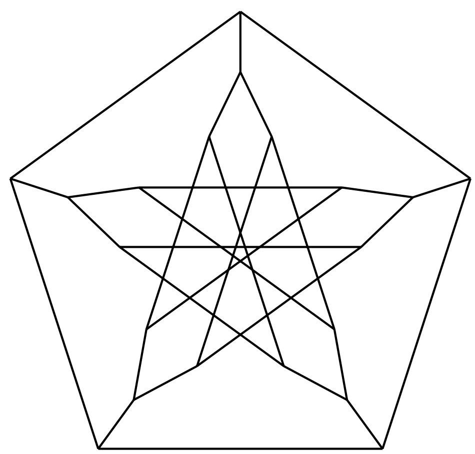
XXX Olimpiada Costarricense de Matemáticas

MEP–UNA–UCR–MICITT–UNED–ITCR

# Banco de problemas - Soluciones

## Final - Día 2



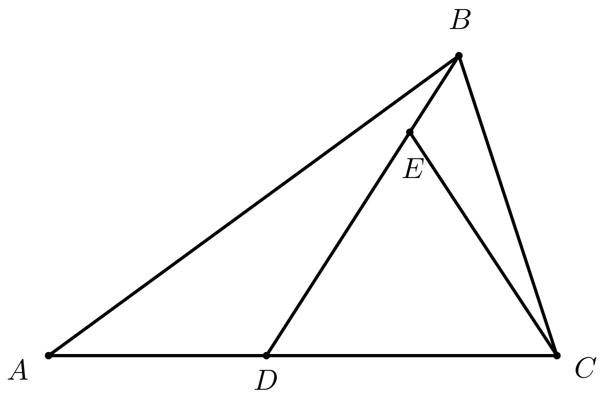
Nivel I

(7°)

2018

## GEOMETRÍA

1. Considere la figura adjunta en la que $A-D-C$ y $D-E-B$. Si $m\angle BAC = 42°$, $m\angle BDC = 56°$, $DC = DE$ y $AB = AC$, determine $m\angle BCE$.




**Solución:**

Se tiene que el $\angle BDC$ mide $56°$, entonces $m\angle ADB = 180° - m\angle BDC = 124°$.

Luego, el $\angle BAC$ mide $42°$ entonces $m\angle ABD = 180° - m\angle BAC - m\angle ADB = 14°$.

Como $DE = DC$ entonces $m\angle DCE = m\angle DEC$, así que, $2m\angle DCE + 56° = 180° \Rightarrow m\angle DCE = m\angle DEC = 62°$.

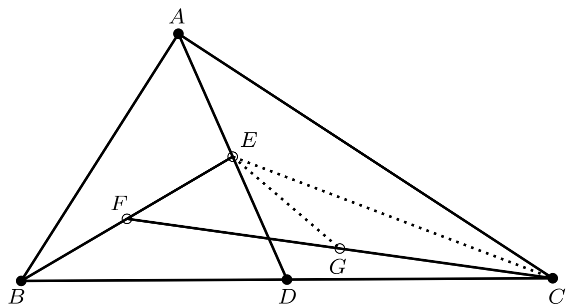
Por otro lado, $AB = AC$ entonces $m\angle ABC = m\angle ACB$, así que, $2m\angle ACB = 180° - m\angle BAC \Rightarrow m\angle ACB = 69°$. Observe que $m\angle ACB = m\angle DCB = 69°$

Pero $m\angle DCB = m\angle DCE + m\angle BCE \Rightarrow m\angle BCE = m\angle DCB - m\angle DCE = 69° - 62° = 7°$

2. Sea el $\triangle ABC$, $D$ el punto medio de $\overline{BC}$, $E$ el punto medio de $\overline{AD}$, $F$ el punto medio de $\overline{BE}$ y $G$ el punto medio de $\overline{FC}$. Si el área del $\triangle ABC = 16$ m$^2$, determine el área del $\triangle EFG$.

   **Solución:**

   Considere la siguiente figura:




   En cada caso, cada pareja de triángulos tienen la misma altura, así:

   $(EFG) = \frac{1}{2}(EFC)$ ($FG$ es un medio de $FC$)

   $(EFC) = \frac{1}{2}(BEC)$ ($EF$ es un medio de $EB$)

   $(BED) = \frac{1}{2}(BEC)$ ($BD$ es un medio de $BC$)

   Así $(EFC) = (BED)$.

   $(BED) = \frac{1}{2}(ABD)$ ($ED$ es un medio de $AD$)

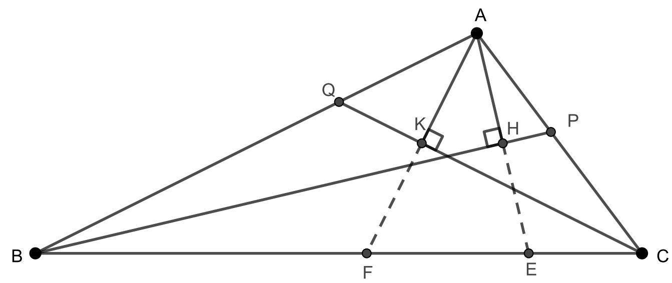
   $(ABD) = \frac{1}{2}(ABC)$ ($BD$ es un medio de $BC$)

   Así tenemos: $(\triangle ABD) = 8$, $(EFC) = 4$ y $(EFG) = 2$ m$^2$

3. Considere el $\triangle ABC$. Sea $P$ un punto de $\overline{AC}$, tal que $\overline{BP}$ biseca al $\angle ABC$; en forma similar, sea $Q$ un punto de $\overline{AB}$, tal que $\overline{QC}$ biseca al $\angle BCA$.

   Si $\overline{AK}$ es la altura del $\triangle AQC$ y $\overline{AH}$ es la altura del $\triangle APB$. Determine si las rectas $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{KH}$ se intersecan o son paralelas. Justifique.

   **Solución:**
   Sea $F$ el punto de intersección de la recta $\overleftrightarrow{AK}$ con $\overline{BC}$ y $E$ el punto de intersección de la recta $\overleftrightarrow{AH}$ con $\overline{BC}$ como se muestra en la figura.




   Note que los triángulos $\triangle AHB$ y $\triangle EHB$ son congruentes ya que $\overline{BP}$ biseca al ángulo $B$ y los ángulos $\angle AHB$ y $\angle EHB$ son rectos, por tanto $AH = HE$.

   En forma similar, $AK = KF$ y aplicando el teorema de la paralela media sobre el $\triangle AFE$ se comcluye que las rectas $\overleftrightarrow{EF}$ y $\overleftrightarrow{KH}$ son paralelas.

## TEORÍA DE NÚMEROS

1. Determinar todos los números enteros $n$ de cinco cifras, tales que el cuadrado de $n$ sea un número que termine en las mismas cinco cifras de $n$ colocadas en el mismo orden.

**Solución:**

Supongamos que el número buscado es $(abcde)_{10}$. Lo que se busca es determinar el valor de las cifras del número, de forma que: $(abcde)_{10} \cdot (abcde)_{10} = (...abcde)_{10}$

Explorando los posibles valores del dígito $e$ que permitiría que esto suceda, se lleqa a la conclusión de que $e \in \{0, 1, 5, 6\}$, pues para los demás dígitos, no se cumpliría que el último dígito siga siendo el mismo y en la misma posición. Pero si $e = 0$ el número tendría que ser 00000 lo cual no es en realidad un número de cinco cifras. Por otra parte, si $e = 1$ la solución sería 00001 que se descarta de la misma manera que el caso anterior. Por lo tanto, se tiene que $e = 5$ o $e = 6$. Analizamos esos casos por aparte.

Si $e = 5$, al efectuar la operación dígito a dígito, se puede deducir que $d = 2$. Así el número es hasta el momento

$$(abc25)_{10} = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + 2 \cdot 10 + 5 = (abc00)_{10} + 25$$

Entonces $((abc25)_{10})^2 = ((abc00)_{10}+25)^2 = ((abc00)_{10})^2+50(abc00)_{10}+625$. Este último número termina con los dígitos 625, pero como se supone que debe terminar en $c65$, podemos deducir que $c = 6$.

Entonces el número hasta el momento es

$$(ab625)_{10} = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10 + 5 = (ab000)_{10} + 625$$

Al efectuar $((ab625)_{10})^2 = ((ab000)_{10} + 625)^2 = ((ab000)_{10})^2 + 1250(ab000)_{10} + 390625$. Este último número termina con los dígitos 0625 pero como se supone que debe terminar en $d625$, podemos deducir que $d = 0$.

Entonces el número hasta el momento es

$$(ab625)_{10} = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10 + 5 = (ab000)_{10} + 625$$

Al efectuar $((a0625)_{10})^2 = ((a0000)_{10} + 625)^2 = ((a0000)_{10})^2 + 1250(ab000)_{10} + 390625$. Este último número termina con los dígitos 90625, pero como se supone que debe terminar en $a0625$, podemos deducir que $a = 9$.

Por lo tanto, un número de cinco dígitos que cumple con las condiciones dadas es 90625.

Por un procedimiento análogo, se analiza el caso faltante ($e = 6$). Al finalizar se llega a que el número es 09376, que aunque en efecto cumple que al elevarlo alcuadrado las cinco cifras quedan en la misma posición ($(09376)^2 = 87909376$), en realidad no se considera un número de cinco cifras. Por lo tanto, el número que cumple los requirimientos es 90625.

2. Determine todos los números enteros de tres dígitos con exactamente 16 divisores positivos.

**Solución:**

Sea $n$ el número buscado. Debe cumplirse: $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$ donde $p_1, p_2, \cdots, p_r$ son primos distintos y $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ son enteros positivos. El número de divisores positivos de $n$ es $d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$.

Desde que $2^{10} > 1000$, debemos buscar números que sean producto de al menos dos primos distintos. Tenemos los siguientes dos casos:

Caso I: $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2}$.

Para este caso, $d(n) = 16$ si y solo si $\alpha_1 + 1 = 2$ y $\alpha_2 + 1 = 8$. Los números $n$ que satisfacen $100 \leq n < 1000$ son: $2^7 \cdot 3 = 384, 2^7 \cdot 5 = 640$ y $2^7 \cdot 7 = 896$

Como también, $d(n) = 16$ si y solo si $\alpha_1 + 1 = 4$ y $\alpha_2 + 1 = 4$. Los números $n$ que satisfacen $100 \leq n < 1000$ son: $2^3 \cdot 3^3 = 216$

Caso II: $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot p_4^{\alpha_4}$.

Entonces, $d(n) = 16$ si y solo si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1$. Los números de tres dígitos que son producto de cuatro primos distintos son: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 330, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 = 390, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 = 510, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19 = 570, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 23 = 690, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29 = 870, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 31 = 930, 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 770$ y $2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 910$

De los casos I y II, todos los números enteros de tres dítitos con exactamente 16 divisores positivos son: 210, 216, 330, 384, 390, 510, 570, 640, 690,770, 870, 896, 910 y 930.

## RAZONAMIENTO LÓGICO

1. Un juego para dos personas consiste en lo siguiente: un jugador selecciona cuatro de seis colores disponibles, sin repetir, y los coloca en cierto orden, el segundo jugador debe tratar de adivinar los colores y el orden seleccionados para lo cual tiene cuatro intentos. En cada intento, el primer jugador le dice cuántos colores escogió correctamente y cuantos están colocados en el orden correcto. Los seis colores disponibles son amarillo, azul, café, morado, rojo y verde.
   Sara escogió los cuatro colores y su amiga Emma trata de adivinarlos. En su primer intento, Emma escogió rojo, amarillo, verde, azul, en ese orden respectivamente; Sara le indicó que tres de esos colores son correctos (están entre los inicialmente escogidos por Sara) pero solamente uno está en la posición corecta.
   En el segundo intento Emma colocó, en el orden 1, 2, 3, 4, los colores rojo, café, amarillo y verde; Sara le indicó que ahora solamente tenía dos colores correctos, uno de ellos en la posición correcta.
   Entonces Emma escogió los colores rojo, morado, azul y amarillo (en el orden 1, 2, 3, 4 respectivamente) y Sara le dijo que ahora tenía los cuatro colores correctos pero ninguno en posición correcta.
   Determine el orden correcto de los colores escogidos inicialmente por Sara.

   **Solución:**

   En el primer intento de Emma había un color en posición correcta, de los datos del tercer intento se deduce que el rojo no está en la posición 1.

   Observando el intento dos, se tiene que:

   a) Hay un color colocado en posición correcta.
   b) El rojo no está en posición correcta.
   c) El café y el verde no son colores correctos.
   d) Por lo tanto, el amarillo es el que está en posición correcta (Amarillo va en posición 3)

   Con esta nueva conclusión se analiza nuevamente el primer intento. Se tiene que:

   a) El rojo está en posición incorrecta.
   b) El verde no es color correcto.
   c) El amarillo no va en la posición 2 (pues va en posición 3)
   d) Hay un color en posición correcta.

   Por lo tanto, el azul está en posición correcta. (Azul va en posición 4)

   Finalmente, como sabemos que el rojo no va en posición 1, debe ir en posición 2 (ya la posición 3 y 4 están ocupadas) y el morado en posición 1.

   Entonces el orden de los colores es Morado, Rojo, Amarillo, Azul.

2. En el periodo de vacaciones de medio año, 6 compañeros se pusieron de acuerdo para verse en casa de alguno de ellos y jugar video juegos. Sin embargo, cada vez que se reunían exactamente un compañero no podía asistir. Si se sabe que el que más veces asistió fue 10 veces y el que menos asistió fue 7 veces, determine la cantidad de veces que fueron el resto de compañeros.

**Solución:**

Falta por asignar las veces que fueron los otros 4 compañeros. Las posibilidades son:

*a*) Los 4 asistieron 8 veces.

*b*) 3 asistieron 8 veces y uno 9 veces.

*c*) 2 asistieron 8 veces y 2 asistieron 9 veces.

*d*) 1 asistió 8 veces y los otros tres 9 veces.

*e*) Los 4 asistieron 9 veces.

Si contabilizamos las veces que asistieron entre todos según las posibilidades descritas anteriormente, tenemos que:

Si se da opción a, entonces asistieron 49 veces.
Si se da opción b, entonces asistieron 50 veces.
Si se da opción c, entonces asistieron 51 veces.
Si se da opción d, entonces asistieron 52 veces.
Si se da opción e, entonces asistieron 53 veces.

Por otra parte, se sabe que siempre faltó exactamente uno de los 6 compañeros, por lo tanto siempre asistieron 5 de ellos, es decir, el total de asistencia debe ser múltiplo de 5, lo cual nos deja únicamente una posibilidad.

Así, 3 asistieron 8 veces y uno de ellos 9 veces.

3. En un tablero $7 \times 7$ se colocan ocho fichas. ¿Pueden elegirse siempre dos de ellas que no estén en la misma fila ni en la misma columna ni en la misma diagonal? Justifique complemente su análisis.

   **Solución:**

   La respuesta es sí.

   Para demostrarlo, vamos a asociar un número entre 1 y 7 a cada casilla del tablero como muestra la siguiente tabla:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Se puede observar que cada número aparece una vez en cada fila y en cada columna y no aparece más de una vez en la misma diagonal (los números van como a salto de caballo).

   Por otro lado, el principio del palomar nos asegura que si colocamos ocho fichas siempre habrá dos que compartan el mismo número y, por tanto, estas no se hallarán en la misma columna, fila o diagonal.

4. Indique la forma y el color que tiene un objeto si se saben las siguientes afirmaciones:

   *a*) Si es azul, entonces es redondo.

   *b*) Si es cuadrado, entonces es rojo.

   *c*) Es azul o amarillo.

   *d*) Si es amarillo, entonces es cuadrado.

   *e*) Es cuadrado o redondo.

   **Solución:**

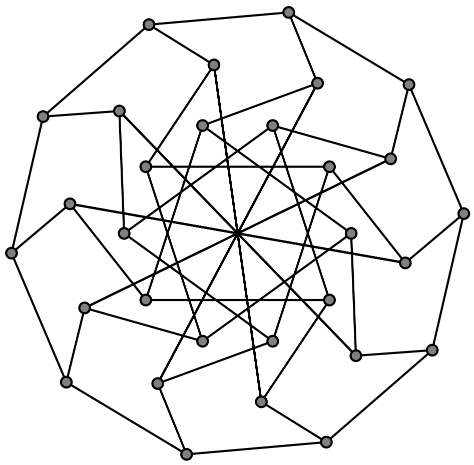
   Hay tres colores y dos formas por lo que se tienen 6 posibilidades azul y cuadrado, azul y redondo, amarilo y cuadrado, amarillo y redondo, rojo y cuadrado, rojo y redondo.
   Por la segunda afirmación un objeto cuadrado no puede ser amarillo ni azul, por lo que descartamos azul y cuadrado,amarillo y cuadrado.
   Por la afirmación 3 el objeto no es rojo, por lo que descarta rojo y cuadrado, rojo y redondo.
   Por la afirmación 4 no puede ser amarillo y redondo.
   Por lo tanto, el objeto solo puede ser azul y redondo.

# XXX Olimpiada Costarricense de Matemáticas

MEP–UNA–UCR–MICITT–UNED–ITCR

## Banco de problemas - Soluciones

## Final - Día 2



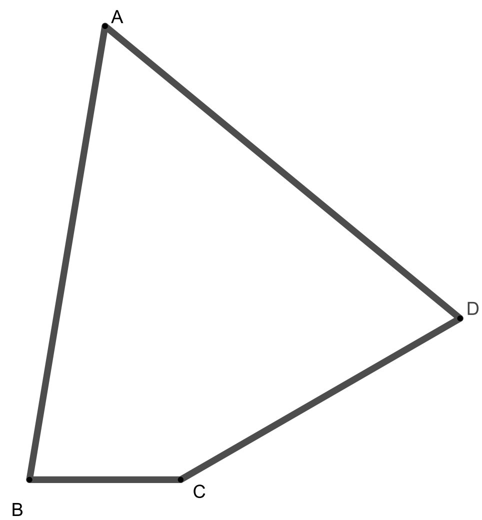
## Nivel II

## $(8^\circ - 9^\circ)$

## 2018

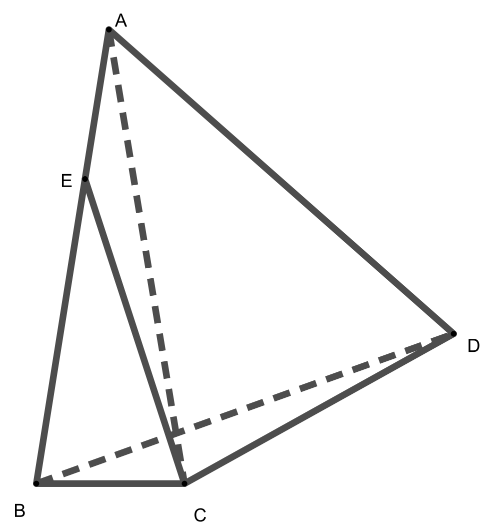
## GEOMETRÍA

1. Considere el $\square ABCD$ de la figura adjunta. Sea $E$ un punto tal que $A - E - B$, $m\angle BEC = 30°$, $m\angle ABC = m\angle ACB = 80°$ y $\overline{AB} \cong \overline{BD} \cong \overline{AD}$. Demuestre que $\overline{EC} \cong \overline{CD}$.




**Solución:**

Se probará que $\triangle AEC \cong \triangle BCD$



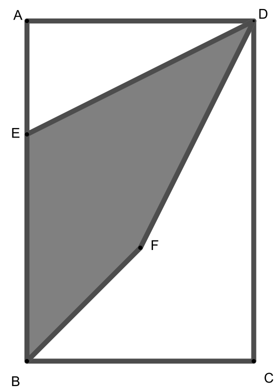

Como $\overline{AB} \cong \overline{BD} \cong \overline{AD}$ entonces el $\triangle ABD$ es equilátero y $m\angle ABC = m\angle BDA = M\angle DAB = 60°$.
Dado que $m\angle ABC = m\angle ACB = 80°$ entonces $m\angle BAC = 20°$.
Si $m\angle BEC = 30°$ entonces $m\angle AEC = 150°$ y $m\angle ECA = 10°$.
Si $m\angle BAC = 20°$ y $m\angle BDA = 60°$ entonces $m\angle CAD = 40°$.
En el $\triangle ABC$ se tiene que $m\angle ABC = m\angle ACB = 80°$, por lo tanto $\triangle ABC$ es isósceles. Así, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.
Del eneunciado se tiene que $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ y del paso anterior $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, entonces $\overline{AC} \cong \overline{AD}$. Por lo tanto $\triangle ACD$ también es isósceles.

Como $\triangle ACD$ es isósceles y $m\angle CAD = 40°$ entonces $m\angle ACD = m\angle CDA = 70°$.

Luego $m\angle BDC = 10°$, $m\angle DBC = 20°$ y $m\angle BCD = 150°$.

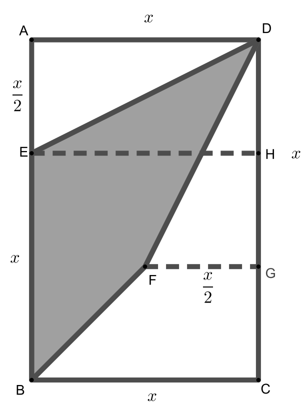
Finalmente, como $\overline{AC} \cong \overline{BD}$, por criterio de congruencia $a.l.a$ se tiene que $\triangle AEC \cong \triangle BCD$, del cual se deduce que $\overline{EC} \cong \overline{CD}$.

2. Sea $\square ABCD$ un rectángulo, tal que $3AD = 2CD$. Sea $E$ tal que $A - E - B$, $EB = BC$ y $F$ punto medio de $\overline{EC}$. Determine qué razón del rectángulo $ABCD$ representa el área sombreada.




**Solución:**

Sea $AD = x$ entonces $CD = \dfrac{3x}{2}$, luego $(ABCD) = \dfrac{3x^2}{2}$. Ahora determinemos el área sombreada. Consideremos la figura adjunta.




Como $F$ es el punto medio de $\overline{EC}$ entonces $F$ es el centro del cuadrado $EBCH$, por lo tanto $FG = \dfrac{x}{2}$. Así, $(ADE) = (FGD) = \dfrac{x \cdot \frac{x}{2}}{2} = \dfrac{x^2}{4}$.

Por otra parte, $(BCGF) = \dfrac{(x + \frac{x}{2}) \cdot \frac{x}{2}}{2} = \dfrac{\frac{3x}{2} \cdot \frac{x}{2}}{2} = \dfrac{3x^2}{8}$.

Luego, el área sombreada corresponde a: $A_s = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{3x^2}{8} = \dfrac{5x^2}{8}$.

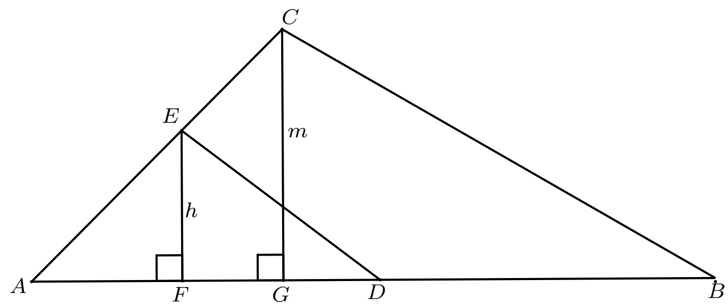
Finalmente, la razón $r$ de las áreas está dado por: $r = \dfrac{\frac{5x^2}{8}}{\frac{3x^2}{2}} = \dfrac{10}{24} = \dfrac{5}{12}$.

3. Considere el $\triangle ABC$, tal que $m\angle CAB = 45°$ y $m\angle CBA = 30°$. Sean $D$ en $\overline{AB}$ y $E$ en $\overline{AC}$, tales que $m\angle ADE = 60°$ y $\overline{DE}$ divide al $\triangle ABC$ en dos regiones con áreas iguales.

   Demuestre que $\left(\frac{AB}{AD}\right)^4 = 12$.

   **Solución:**

   Considere la figura en la que están las alturas $h$ del $\triangle AED$ y $m$ del $\triangle ACB$, trazadas desde $E$ y $C$, respectivamente.


   Dado que $m\angle CAG = 45°$ y $\triangle ACG$ es rectángulo, entonces $m\angle ACG = 45°$ y $AG = m$. Para el $\triangle AEF$ (que es también triángulo rectángulo isósceles) con argumentos similares se llega a que $AF = h$.

   En el $\triangle CGB$, dado que $m\angle CBG = 30°$ y este triángulo es rectángulo, se concluye que $m\angle GCB = 60°$; para este triángulo especial $30°-60°-90°$ se concluye que $GB = m\sqrt{3}$.

   En el $\triangle EFD$ (que también es un triángulo especial $30° - 60° - 90°$), se tiene que $FD = \frac{h}{\sqrt{3}}$.

   Así, el valor numérico de $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AG + GB}{AF + FD} = \dfrac{m + m\sqrt{3}}{h + \frac{h}{\sqrt{3}}} = \dfrac{m\left(1+\sqrt{3}\right)}{h\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \dfrac{m}{h}\sqrt{3}$ $\qquad (*)$

   Las áreas de los triángulos $\triangle AED$ y $\triangle ACB$ están dadas por:

   $$(AED) = \frac{AD \cdot h}{2} = \frac{h\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot h}{2} = h^2\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

   $$(ACB) = \frac{AB \cdot m}{2} = \frac{m\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot m}{2} = m^2\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

   Como $\overline{DE}$ divide al $\triangle ACB$ es dos regiones de igual área, se tiene que:

   $$\begin{aligned} &(ACB) = 2\,(AED) \\ &m^2\frac{1+\sqrt{3}}{2} = 2h^2\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \\ &m^2 = 2h^2\frac{1}{\sqrt{3}} \\ &\frac{m^2}{h^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ &\frac{m}{h} = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt[4]{12}}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

   Sustituyendo este último resultado en $(*)$, se tiene: $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{m}{h}\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt[4]{12}}{\sqrt{3}}\sqrt{3} = \sqrt[4]{12}$.

   Por lo tanto, $\left(\frac{AB}{AD}\right)^4 = 12$.

## ÁLGEBRA

1. Considere el polinomio $p(x)$ dado por $p(x) = x^2 + ax + b$. Determine todos los resultados enteros $a + b$, tales que $p(a + b) = 0$.

**Solución:**

Como $a + b$ es raíz del polinomio $p(x)$, se tiene que:

$$\begin{aligned} p(a+b) = 0 \quad &\Rightarrow \quad (a+b)^2 + a(a+b) + b = 0 \\ &\Rightarrow \quad a^2 + 2ab + b^2 + a^2 + ab + b = 0 \\ &\Rightarrow \quad b^2 + (3a+1)\, b + 2a^2 = 0 \end{aligned}$$

Así, $b$ debe ser raíz del polinomio $q(x) = x^2 + (3a+1)\, x + 2a^2$. Como $b$ debe ser entero y $q(x)$ posee raíz entera si su discriminante $\Delta$ es cuadrado perfecto, se tiene:

$$\begin{aligned} \Delta &= (3a+1)^2 - 4 \cdot 2a^2 \\ &= 9a^2 + 6a + 1 - 8a^2 \\ &= a^2 + 6a + 1 \\ &= \left(a^2 + 6a + 9\right) - 8 \\ &= (a+3)^2 - 8 \end{aligned}$$

Si $c$ es entero, se busca $a$ de manera que $(a+3)^2 - 8 = c^2 \Rightarrow (a+3)^2 - c^2 = 8$. Los únicos cuadrados perfectos cuya diferencia es 8 son 9 y 1, por lo que:

$$\begin{aligned} (a+3)^2 = 9 \quad &\Rightarrow \quad a + 3 = \pm 3 \\ &\Rightarrow \quad a = \pm 3 - 3 \\ &\Rightarrow \quad a = -6 \vee a = 0 \end{aligned}$$

Con $a = -6 \Rightarrow b^2 - 17b + 72 = 0 \Rightarrow b = \dfrac{17 \pm 1}{2} \Rightarrow b = 9 \vee b = 8$.

Con $a = 0 \Rightarrow b^2 + b = b(b+1) = 0 \Rightarrow b = -1 \vee b = 0$.

Por lo tanto, los posibles valores $a + b$ son: 0, 3, 2, o $-1$.

2. Si $x$, $y$, $z$ son números reales, tales que

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz+zx=5 \end{cases}$$

Determine el valor máximo de $S=(x-y)^2$.

**Solución:**

De la primera ecuación se obtiene que $x+y=6-z$, por tanto $(x+y)^2=(6-z)^2$, mientras que de la segunda ecuación se obtiene que $xy=5-z(x+y)=5-z(6-z)=5-6z+z^2$.

Por otra parte, note que $S=(x-y)^2=x^2-2xy+y^2=x^2+2xy+y^2-4xy=(x+y)^2-4xy$. así, $S=(x+y)^2-4xy=(6-z)^2-4(5-6z+z^2)=-3z^2+12z+16$.

Con lo anterior, $S$ es una función cuadrática convexa, cuyo vértice corresponde a $(2,28)$. Por lo tanto, su máximo valor es 28.

3. Considere el polinomio $p(x)$ dado por $p(x) = 2x^2 + (1-2a)x + a^2 - 3$. Halle todos los valores reales positivos de la constante $a$, y los respectivos valores para los ceros $x_1$ y $x_2$ de $p(x)$, tales que $2x_1 = 2x_2 - 1$.

**Solución:**

$p(x) = 2x^2 + (1-2a)x + a^2 - 3$, de esta manera:

$$\begin{aligned} p(x) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2x^2 + (1-2a)x + a^2 - 3 = 0 \\ &\Rightarrow \quad x^2 + \left(\frac{1-2a}{2}\right)x + \frac{a^2-3}{2} = 0 \end{aligned}$$

Como $x_1$ y $x_2$ son ceros del polinomio, $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{a^2-3}{2}$ y $x_1 + x_2 = -\dfrac{1-2a}{2} = \dfrac{2a-1}{2}$

Luego, dado que $2x_1 = 2x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2 - \dfrac{1}{2}$. Además:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 = -\frac{1-2a}{2} \quad &\Rightarrow \quad x_1 + x_2 = \frac{2a-1}{2} \\ &\Rightarrow \quad x_2 - \frac{1}{2} + x_2 = \frac{2a-1}{2} \\ &\Rightarrow \quad 2x_2 = \frac{2a-1}{2} + \frac{1}{2} = a \\ &\Rightarrow \quad x_2 = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 = \frac{a^2-3}{2} \quad &\Rightarrow \quad \left(x_2 - \frac{1}{2}\right) \cdot x_2 = \frac{a^2-3}{2} \\ &\Rightarrow \quad \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2-3}{2} \\ &\Rightarrow \quad \frac{a^2-a}{2} = a^2 - 3 \\ &\Rightarrow \quad a^2 - a = 2a^2 - 6 \\ &\Rightarrow \quad a^2 + a - 6 = (a+3)(a-2) = 0 \end{aligned}$$

De las soluciones $a = -3$ y $a = 2$, la primera se descarta (pues $a$ debe ser positivo). Así, con $a = 2$ se tiene $x_2 = 1$ y $x_1 = \dfrac{1}{2}$.

## RAZONAMIENTO LÓGICO

1. En un país hay 17 ciudades. El gobierno va a construir $n$ autopistas de modo que cada autopista conecta dos ciudades del país. Determine el valor mínimo de $n$, de modo que, independientemente de cómo se construyan las autopistas, se puede viajar entre cualesquiera dos ciudades (posiblemente pasando por otras ciudades).

   **Solución:**

   Decimos que un conjunto de ciudades está **conectado** si se puede ir entre cualesquiera dos de ellas, usando las autopistas construidas. Observe que si se tiene dos conjuntos distintos de ciudades conectadas, entonces no es posible viajar de una ciudad de un conjunto a una ciudad del otro. Por otro lado, observe que si el gobierno construye todas las autopistas en un conjunto de 16 ciudades, y deja una aislada, entonces no se va a cumplir la propiedad de que todas las ciudades pertenezcan a un conjunto conectado.

   Por lo tanto, la cantidad de autopistas $n$ debe cumplir que

$$n > \binom{16}{2} = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120.$$

   Ahora, se comprueba que con 121 caminos se obtiene la propiedad deseada. Suponga que se tiene dos conjuntos de ciudades conectados, pero de modo que no están conectados entre ellos, es decir, no hay carreteras entre ninguna ciudad del primer conjunto con el segundo. En el mejor caso posible, entonces existe una carretera entre cualesquiera dos ciudades del primer conjunto, y entre cualesquiera dos ciudades del segundo conjunto. Si el primer conjunto tiene $k$ ciudades entonces el segundo tendrá $17 - k$ ciudades. En este caso, la cantidad de carreteras en el primer conjunto es $\binom{k}{2} = \frac{k \cdot (k-1)}{2}$, y la cantidad de carreteras en el segundo conjunto es $\binom{17-k}{2} = \frac{(17-k) \cdot (16-k)}{2}$.

   Luego, el total de caminos es

$$\begin{aligned}
\frac{k \cdot (k-1)}{2} + \frac{(17-k) \cdot (16-k)}{2} &= \frac{1}{2}\left(k^2 - k + 272 - 33k + k^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2k^2 - 34k + 272\right) \\
&= k^2 - 17k + 136 \\
&= (k - 17/2)^2 + 255/4 \\
&\leq (15/2)^2 + 399/4 \\
&= 120
\end{aligned}$$

   Sin embargo, se supone que hay al menos 121 caminos.

2. En una mesa circular están sentadas cinco mujeres de tal forma que cada una tiene a dos amigas vecinas y a dos amigas en frente; de ese mismo modo están sentados Carlos y otros cuatro amigos en otra mesa circular.

   Se observa que las 10 personas únicamente usan dos redes sociales INS y FAC para comunicarse entre sí, pero para cada amigo o amiga en particular utilizan únicamente una de las dos; además, tres personas cualesquiera no usan la misma red social para comunicarse entre ellos.

   Si Carlos le comunica por FAC a su vecino Juan: "Las cinco mujeres cuando se comunican con una vecina lo hacen por FAC, mientras que cuando lo hacen con una amiga del frente lo hace por INS" a lo cual Juan le responde "los hombres hacemos lo mismo". Determine si Carlos y Juan dicen la verdad.

   **Solución:**

   Los dos amigos tiene razón, como se demuestra a continuación.

   - Vamos a ver que Carlos a lo sumo se comunica con 2 mujeres por FAC. Si Carlos se comunica por FAC con 3 mujeres, no importa como las escoja siempre dos de ellas serán vecinas. Suponga sin pérdida de generalidad que las vecinas son Ana y Berta.

     Carlos se comunica por FAC con Juan, Ana y Berta por lo tanto Ana se comunica por INS con Berta.

     Ahora, si Juan se comunica por FAC con Berta entonces Carlos, Juan y Berta usan la misma red social, lo cual contradice el enunciado.

     Si Juan se comunica por INS con Berta entonces Juan se comunica por FAC con Ana (ya que Ana se comunica por INS con Berta).

     Pero eso significa que Carlos, Juan y Ana usan la misma red social, contradicción.

   - Vamos a ver que Carlos se comunica con el otro vecino por FAC

     Si Carlos se comunica por INS con el otro vecino, por lo anterior Carlos se comunicaría por INS a lo sumo con dos mujeres, eso significa que Carlos no se comunica con la quinta mujer, contradición.

     Por lo tanto Carlos se comunica por FAC con el otro vecino. Así todos los hombres se comunican con sus vecinos por FAC y por tanto con los amigos del frente por INS.

     De mismo modo todas las mujeres se comunican con sus vecinas por una red social y con las amigas del frente por otra.

   - Vamos a ver que las mujeres se comunican con sus vecinas por FAC.

     Suponga lo contrario, entonces Ana se comunica por INS con Berta, y Carlos se comunica por FAC con Ana, Berta y Juan.

     Por tanto Juan se comunica por INS con Ana, pues de lo contrario Carlos, Juan y Ana usan la misma red.

     Del mismo modo Juan se comunica por INS con Berta, pero esto implica que Juan, Ana y Berta se comunican por INS, contradicción.

3. En cada una de las seis caras de un cubo se escribe un entero positivo que es una potencia de dos. A cada vértice se le asigna el producto de los números en las tres caras adyacentes al mismo. Cuando se suman todos los números asignados a cada uno de los vértices, se obtiene 30. Encuentre todas las posibles distribuciones de números asignados a las caras del cubo.

   **Solución:**

   Nótese que si $(a_1, a_2)$, $(b_1, b_2)$ y $(c_1, c_2)$ son respectivamente los números asignados a caras opuestas, entonces, los vértices reciben los valores $a_1b_1c_1$, $a_1b_1c_2$, $a_1b_2c_1$, $a_1b_2c_2$, $a_2b_1c_1$, $a_2b_1c_2$, $a_2b_2c_1$ y $a_2b_2c_2$, respectivamente. Es fácil verificar que

   $$a_1b_1c_1 + a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 + a_1b_2c_2 + a_2b_1c_1 + a_2b_1c_2 + a_2b_2c_1 + a_2b_2c_2 = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)(c_1 + c_2)$$

   Como $(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)(c_1 + c_2) = 30$, sin pérdida de generalidad, $a_1 + a_2 = 2$, $b_1 + b_2 = 3$ y $c_1 + c_2 = 5$.

   Como todos son potencias de dos, podemos entonces concluir que $a_1 = a_2 = b_1 = c_1 = 1$, $b_2 = 2$ y $c_2 = 4$.

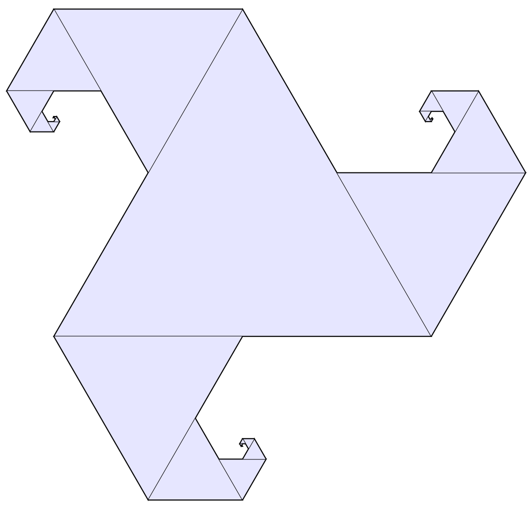
   Todos los demás arreglos se obtienen como permutaciones de estas.

XXX Olimpiada Costarricense de Matemáticas

MEP–UNA–UCR–MICITT–UNED–ITCR

# Banco de problemas - Soluciones

## Final - Día 2



Nivel III

$(10^{\circ} - 11^{\circ} - 12^{\circ})$

2018

## GEOMETRÍA

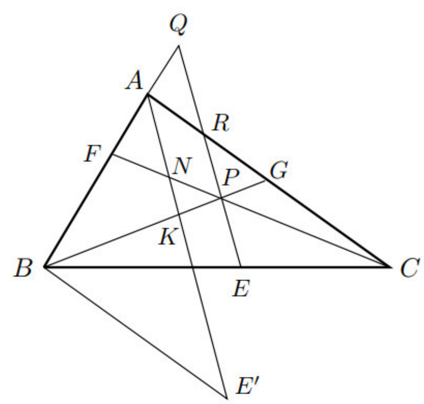
1. Considere el $\triangle ABC$, con $\overline{AD}$ bisectriz del $\angle BAC$, $D$ sobre $\overline{BC}$.

   Sea $E$ un punto sobre $\overline{BC}$, tal que $BD = EC$. Por $E$ se traza la recta $l$ paralela a $\overline{AD}$ y considere un punto $P$ sobre $l$ y dentro del $\triangle ABC$. Sea $G$ el punto donde $\overleftrightarrow{BP}$ corta al lado $\overline{AC}$ y sea $F$ el punto donde $\overleftrightarrow{CP}$ corta al lado $\overline{AB}$. Demuestre que $BF = CG$.

   **Solución:**

   Sean $Q$ y $R$ las intersecciones de $l$ con $\overline{AB}$ y $\overline{CA}$ respectivamente. Sean $K$ y $N$ los puntos donde $\overline{BG}$ y $\overline{CF}$ cortan a $\overline{AD}$, respectivamente. Sea $a = m\angle BAD = m\angle DAC$. Como $l$ y $\overline{AD}$ son paralelas, se tiene que $m\angle ARQ = m\angle DAC = a$, y entonces el $\triangle AQR$ es isósceles con $AQ = AR$. También, por ser $l$ y $\overline{AD}$ paralelas, se tiene que $m\angle ADB + m\angle REC = 180°$, $m\angle ADB = m\angle QEB$ y $m\angle ERC = m\angle BAD = m\angle BQE = a$.

   Por otro lado, como $BD = EC$, se tiene que $BE = CD$. Sea $E'$ sobre la prolongación de $\overline{AD}$ (con $D$ entre $A$ y $E'$) y tal que $DE' = ER$. Por el criterio $LAL$, los triángulos $\triangle BDE'$ y $\triangle CER$ son congruentes, lo que implica que $m\angle BE'D = m\angle CRE = a$, y entonces el $\triangle ABE'$ es isósceles, con $BE' = AB$, pero $BE' = CR$ (por la congruencia) y entonces $AB = CR$.

   Tenemos también que, $BQ = BA + AQ = RC + AR = AC$. Ahora, dado que $\triangle CRP \sim \triangle CAN$ y $\triangle BAK \sim \triangle BQP$, se obtiene:

   $$\frac{AK}{QP} = \frac{BK}{BP} = \frac{RC}{AC} = \frac{RP}{AN} \Rightarrow \frac{AK}{RP} = \frac{PQ}{AN}$$

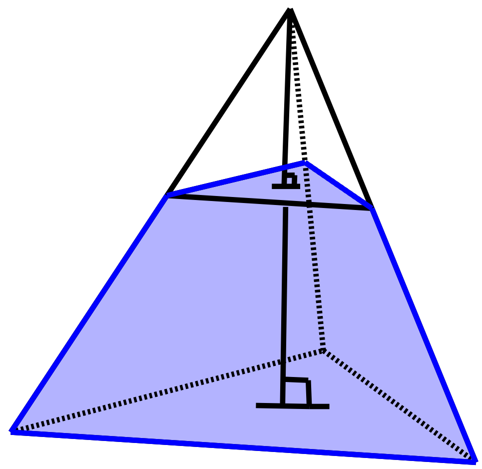
   Dado que $\triangle AFN \sim \triangle QFP$ y $\triangle RGP \sim \triangle AGK$, se obtiene:

   $$\frac{GK}{GP} = \frac{KA}{RP} = \frac{PQ}{AN} = \frac{FP}{FN} \Rightarrow \frac{GP + PK}{GP} = \frac{FN + NP}{FN} \Rightarrow \frac{PK}{GP} = \frac{PN}{FN}$$

   Finalmente:

   $$\frac{AR}{RG} = \frac{PK}{GP} = \frac{PN}{NF} = \frac{AQ}{AF} \Rightarrow RG = AF \Rightarrow BF = AB - AF = CR - RG = CG$$

2. Las cuatro caras de una pirámide triangular recta son triángulos equiláteros cuya arista mide 3 dm. Suponga que la pirámide es hueca, que descansa sobre una de sus caras en una superficie horizontal (ver figura adjunta) y que en su interior hay 2 $dm^3$ de agua. Determine la altura que alcanza el líquido en el interior de la pirámide.



**Solución 1:**

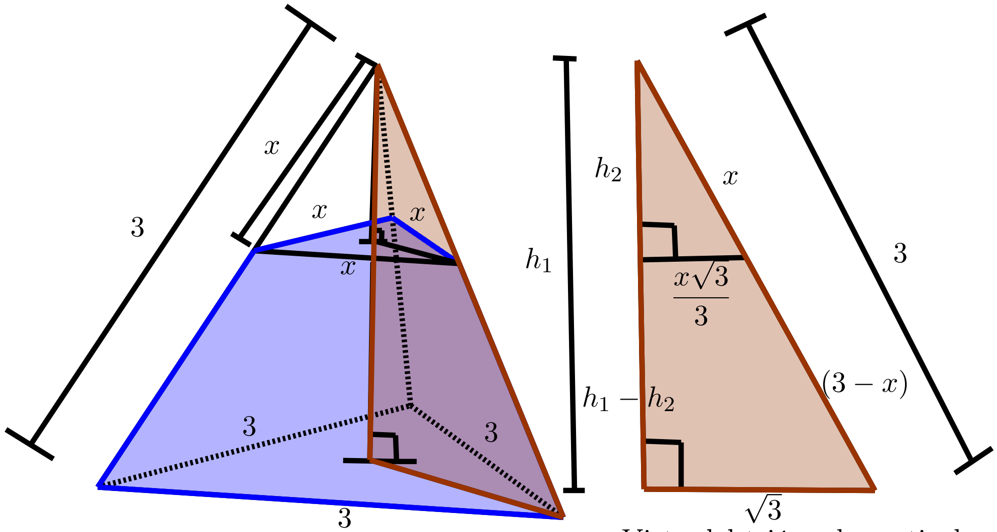
Observe que debido a que la superficie del agua dentro de pirámide corresponde a un plano paralelo a la base que descansa sobre una superficie horizontal, la cantidad de espacio vacío dentro de la pirámide, corresponde también, a su vez, a una pirámide cuyas caras son triángulos equiláteros.

Además note que la altura o nivel que alcanza el agua dentro de la pirámide, corresponde a la diferencia entre la altura total de la pirámide y la altura de la segunda pirámide (la que se forma con el espacio vacío).

Sean entonces:

$h_1$ la altura total de la pirámide grande.
$h_2$ la altura de la pirámide formada por el espacio vacío.
$x$ la arista de la pirámide formada por el espacio vacío.
$V_1$ el volumen total de la pirámide grande.
$V_2$ el volumen de la pirámide formada por el espacio vacío.

Tomando en cuenta que la base de ambas pirámides son triángulos equiláteros, cuyas áreas se pueden calcular por medio de la fórmula $A = \dfrac{L^2\sqrt{3}}{4}$, con $L$ el lado del triángulo, y como el volumen de un prisma se puede calcular mediante la fórmula $V = \dfrac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$, siendo $A_b$ el área de la base y $h$ la altura del prisma.



Vista del triángulo vertical

Se puede establecer la razón entre los volúmenes de ambos prismas, de la siguiente manera:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2\sqrt{3}}{4}\cdot h_2}{\frac{1}{3}\cdot\frac{3^2\sqrt{3}}{4}\cdot h_1} = \frac{x^2 h_2}{3^2 h_1} = \left(\frac{x}{3}\right)^2 \frac{h_2}{h_1}$$

Por otra parte, si se considera que $V_2 = V_1 - 2$ al sustituir en la igualdad anterior se tiene que:

$$\frac{V_1 - 2}{V_1} = \left(\frac{x}{3}\right)^2 \frac{h_2}{h_1}$$

Por la semejanza de los triángulos verticales formados por la arista de la pirámide, el radio de la base, la altura de las pirámides, así como el radio del triángulo sobre la superficie del agua, se tiene que: $\frac{h_2}{h_1} = \frac{x}{3}$.

Al sustituir esto en la igualdad anterior se tiene que:

$$\frac{V_1 - 2}{V_1} = \left(\frac{x}{3}\right)^2 \frac{x}{3} \Longrightarrow \frac{V_1 - 2}{V_1} = \left(\frac{x}{3}\right)^3$$

Despejando se tiene que $x = 3\sqrt[3]{\frac{V_1 - 2}{V_1}}$ $\qquad (\star)$

Además, por propiedades del triángulo equilátero de la base, se sabe que su radio mide $\sqrt{3}$ y por el teorema de Pitágoras se tiene que $h_1 = \sqrt{3^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{6}$. Entonces se tendría que $V_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{3^2\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{6} = \frac{3\sqrt{18}}{4} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$ dm$^3$ (Note que como era de suponerse $V_1 > 2$).

Al sustituir $V_1$ en $(\star)$ se tendría que:

$$x = 3\sqrt[3]{\frac{\frac{9\sqrt{2}}{4} - 2}{\frac{9\sqrt{2}}{4}}} = 3\sqrt[3]{\frac{\frac{9\sqrt{2}-8}{4}}{\frac{9\sqrt{2}}{4}}} = 3\sqrt[3]{\frac{9\sqrt{2} - 8}{9\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{3^3\cdot\frac{\left(9\sqrt{2} - 8\right)}{9\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{27 - 12\sqrt{2}}.$$

Finalmente, al aplicar el teorema de Thales en los triángulos verticales señalados anteriormente, se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{h_1 - h_2}{h_1} &= \frac{3-x}{3}\\ \Longrightarrow h_1 - h_2 &= h_1 \cdot \frac{3-x}{3}\\ \Longrightarrow h_1 - h_2 &= \sqrt{6} \cdot \frac{\left(3 - \sqrt[3]{27-12\sqrt{2}}\right)}{3}\\ \therefore h_1 - h_2 &= \frac{\sqrt{6}}{3}\left(3 - \sqrt[3]{27-12\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

Así, el agua alcanza una altura dentro de la pirámide de $\frac{\sqrt{6}}{3}\left(3 - \sqrt[3]{27-12\sqrt{2}}\right)$ dm.

**Solución 2:**

Observe que debido a que la superficie del agua dentro de pirámide corresponde a un plano paralelo a la base que descansa sobre una superficie horizontal, la cantidad de espacio vacío dentro de la pirámide, corresponde también, a su vez, a una pirámide cuyas caras son triángulos equiláteros.

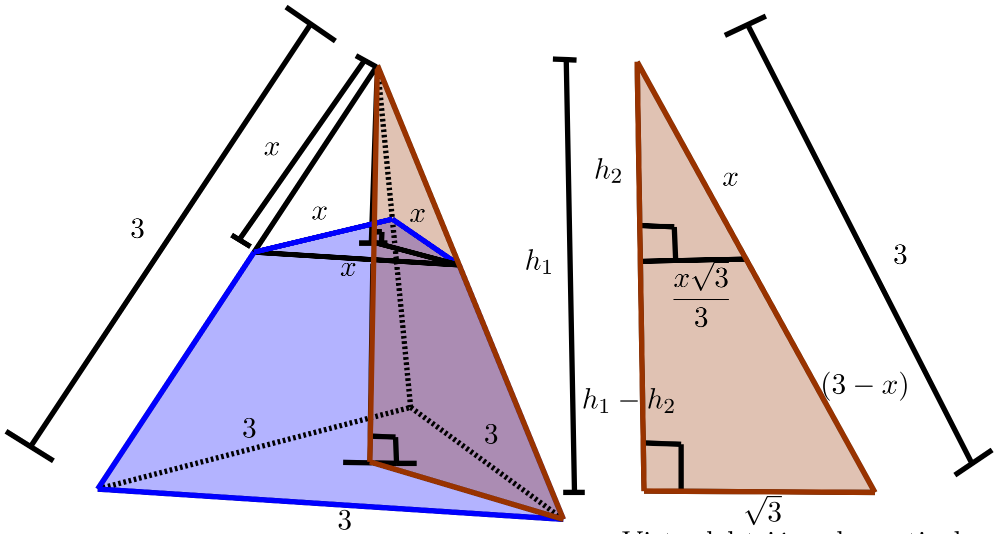
Además, note que la altura o nivel que alcanza el agua dentro de la pirámide, corresponde a la diferencia entre la altura total de la pirámide y la altura de la segunda pirámide (la que se forma con el espacio vacío).

Sean entonces:

$h_1$ la altura total de la pirámide grande.
$h_2$ la altura de la pirámide formada por el espacio vacío.
$x$ la arista de la pirámide formada por el espacio vacío.
$V_1$ el volumen total de la pirámide grande.
$V_2$ el volumen de la pirámide formada por el espacio vacío.

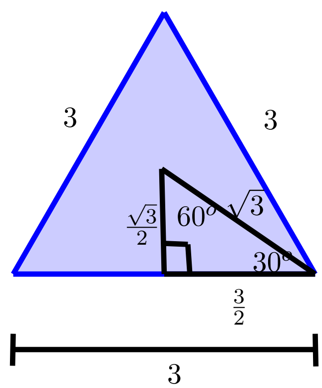
Dado que todas las caras de la pirámide están compuestas por triángulos equiláteros, se pueden establecer relaciones conocidas en el mismo (o triángulos especiales), así como el teorema de Pitágoras en algún triángulo vertical para determinar $h_1$ y $h_2$.

Se utilizará el triángulo vertical formado por la altura de la pirámide, la arista y el radio de la base, aunque también puede utilizarse el triángulo formado por la altura, el apotema de la base y el apotema de la pirámide.




Vista del triángulo vertical

Vista de la base de la pirámide

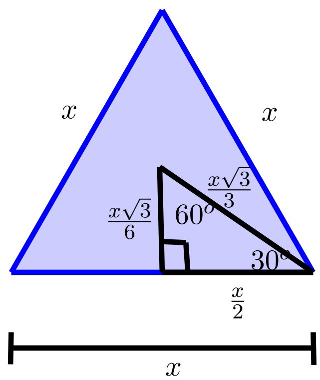



Por el teorema de Pitágoras se tiene que $h_1 = \sqrt{3^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{6}$.

Entonces, se tendría que $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{6} = \frac{3\sqrt{18}}{4} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$ dm$^3$ (Note que como era de suponerse $V_1 > 2$).

Por un razonamiento similar, aplicado a la pirámide pequeña, se puede deducir que el radio del triángulo que se forma en la superficie del agua mide $\dfrac{x\sqrt{3}}{3}$ dm.

Vista de la superficie del agua




Aplicando el teorema de Thales en el triángulo vertical, se tiene que $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \dfrac{h_2}{\frac{x\sqrt{3}}{3}}$, de lo que podemos despejar que $h_2 = \dfrac{x\sqrt{6}}{3}$.

Ahora bien, para encontrar el valor de $x$, podemos calcular $V_2$ por medio de dos razonamientos distintos, para poder establecer una ecuación en la cual podamos despejar el valor de la arista de la pirámide pequeña ($x$).

De acuerdo con los datos del enunciado se tiene que $V_2 = V_1 - 2 = \frac{9\sqrt{2}}{4} - 2 = \dfrac{9\sqrt{2}-8}{4}$ dm$^3$.

Utilizando la fórmula de volumen de la pirámide, se tiene que:

$V_2 = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{x\sqrt{6}}{3} = \dfrac{x^3\sqrt{2}}{12}$ dm$^3$.

Igualando las expresiones obtenidas para $V_2$:

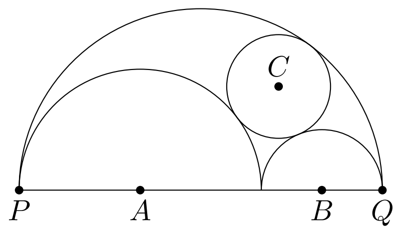
$$\begin{aligned}
\frac{x^3\sqrt{2}}{12} &= \frac{9\sqrt{2}-8}{4} \\
x^3\sqrt{2} &= 3\left(9\sqrt{2}-8\right) \\
x^3 &= \frac{27\sqrt{2}-24}{\sqrt{2}} \\
x^3 &= 27 - 12\sqrt{2} \\
x &= \sqrt[3]{27-12\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Se tendría entonces que $h_2 = \dfrac{x\sqrt{6}}{3} = \dfrac{\sqrt[3]{27-12\sqrt{2}} \cdot \sqrt{6}}{3}$ dm.

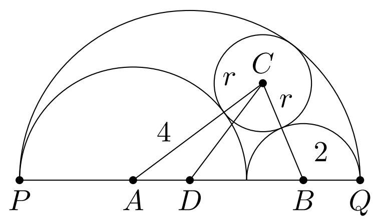
Por lo tanto, la altura o nivel que alcanza el agua dentro de la pirámide corresponde a

$h_1 - h_2 = \sqrt{6} - \dfrac{\sqrt[3]{27-12\sqrt{2}} \cdot \sqrt{6}}{3} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}\left(3 - \sqrt[3]{27-12\sqrt{2}}\right)$ dm.

3. En la figura adjunta, los semicírculos con centros $A$ y $B$ tienen radios 4 y 2, respectivamente. Además, son tangentes interiormente al círculo de diámetro $\overline{PQ}$. También, los semicírculos con centros $A$ y $B$ son tangentes externamente entre ellos. El círculo con centro $C$. es tangente internamente al semicírculo con diámetro $\overline{PQ}$ y tangente externamente a los otros dos semicírculos. Determine el valor del radio del círculo con centro $C$.




**Solución:**
Sea $r$ el radio del círculo con centro en $C$. Sea $D$ el centro del círculo más grande. Entonces $AC = 4 + r$, $AD = 2$, $DB = 4$ y $CB = 2 + r$.
Observe que $(DBC) = 2\,(ADC)$. Además, observe que $DC + r = 6$, pues se puede construir un radio del círculo con centro en $D$, si se prolonga $\overline{DC}$ hasta intersecar la circunferencia.
De esto, se puede deducir que el semiperímetro del $\triangle ACD$ es




$$\frac{1}{2}\,(AC + DC + AD) = \frac{1}{2}\,(4 + r + DC + 2) = \frac{1}{2}(4 + 6 + 2) = 6$$

El semiperímetro del $\triangle DBC$ es

$$\frac{1}{2}\,(DC + CB + DB) = \frac{1}{2}\,(DC + 2 + r + 4) = \frac{1}{2}(6 + 2 + 4) = 6$$

Aplicando la fórmula de Herón en los triángulos $\triangle ADC$ y $\triangle DBC$ se tiene que:

$$2\sqrt{6 \cdot 4 \cdot r \cdot (2 - r)} = \sqrt{6 \cdot 2 \cdot r \cdot (4 - r)}$$

Resolviendo la ecuación se obtiene que $r = \dfrac{12}{7}$.

## TEORÍA DE NÚMEROS

1. Sean $a$ y $b$ enteros positivos tales que $2a^2 + a = 3b^2 + b$. Pruebe que $a - b$ es un cuadrado.

   **Solución:**

   Observe que $a^2 + 2a^2 + a = a^2 + 3b^2 + b \Rightarrow 3a^2 + a - 3b^2 - b = a^2$
   $a^2 = 3(a^2 - b^2) + a - b \Rightarrow a^2 = 3(a+b)(a-b) + (a-b) \Rightarrow a^2 = (a-b)(3a+3b+1)$.
   Así, basta con demostrar que $a - b$ y $3a + 3b + 1$ son coprimos, pues como su producto es un cuadrado, necesariamente cada uno de ellos debe de ser un cuadrado.

   Supongamos que $p$ es un divisor de $a - b$.
   Entonces $p|(a-b) \Rightarrow p|(a-b)(a+b) = (a^2 - b^2)$
   $\Rightarrow p|(a-b) + 3(a^2 - b^2) = a^2 \Rightarrow p|a^2 \Rightarrow p|a^2 - (a^2 - b^2)$.
   $\Rightarrow p|b^2$

   Luego, $p|b$, pues si $p \not| b \Rightarrow p \not| b^2$ lo cual no es posible y así:
   $p|b + (a-b) \Rightarrow p|a$.
   Si $p|(3a+3b+1) \Rightarrow p|(3a+3b+1) - 3a - 3b$ pues $p|a$ y $p|b \Rightarrow p|1 \Rightarrow p = 1$, lo cual contradice que es primo y por lo tanto $p$ no divide a $3a + 3b + 1$.

   Por lo tanto, $a - b$ y $3a + 3b + 1$ son coprimos.

2. Demuestre que existen solamente dos conjuntos de enteros positivos consecutivos que cumplen que la suma de sus elementos es igual a 100.

   **Solución:**

   Sean $n+1, n+2, \cdots, n+r$ los $r$ números consecutivos.

   Así, $100 = (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+r) = rn + \dfrac{r(r+1)}{2} \Rightarrow 200 = r(2n+r+1)$

   Luego, $r$ es divisor de 200 y como $1 < r < 2n+r+1 \Rightarrow r^2 < r(2n+r+1) \Rightarrow r < \sqrt{200}$

   Ahora, $r = 2, 4, 5, 8$ o $10$.

   Si $r = 2, 4$ o $10$, entonces $n$ no es entero y los únicos valores para $r$ son 5 y 8.

   Si $r = 5$, entonces $n = 17$ y el conjunto es $\{18, 19, 20, 21, 22\}$ y si $r = 8$ entonces $n = 8$ y el conjunto es $\{9, 10, \cdots, 16\}$ que son los únicos conjuntos.

3. Determine todas las ternas $(a, b, c)$ de enteros no negativos que satisfagan:

$$(c-1)(ab-b-a) = a+b-2$$

**Solución:**

$$(c-1)(ab-b-a) = a+b-2$$

Sumado $(c-1)$ a ambos lados de la expresión

$$(c-1)(ab-b-a)+(c-1) = a+b+c-3$$

$$(c-1)(ab-b-a+1) = a+b+c-3$$

$$(c-1)(b-1)(a-1) = a-1+b-1+c-1$$

Haciendo la sustitución $x = a-1$, $y = b-1$, $z = c-1$

$$xyz = x+y+z$$

Suponga que $x \geq y \geq z \geq -1$ (ya que $c = z+1 \geq 0$)

- Si $z = -1$ entonces $-xy = x+y-1$

  $$0 = xy+x+y+1-2$$

  $$(x+1)(y+1) = 2$$

  Por tanto $x = 1$ y $y = 0$ y se obtiene la solución $(a, b, c) = (2, 1, 0)$
- Si $z = 0$ entonces $0 = x+y$ entonces $x = -y = 0$ y se obtiene la solución $(a, b, c) = (1, 1, 1)$
- Si $z = 1$ entonces $xy = x+y+1$ y de igual manera

  $$(x-1)(y-1) = 2$$

  Por tanto $x = 3$ y $y = 2$ y se obtiene la solución $(a, b, c) = (4, 3, 2)$
  Entonces sus soluciones son $(2, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ y $(4, 3, 2)$ y sus permutaciones.

4. Sea $p$ un número primo tal que $p = 10^{d-1} + 10^{d-2} + \cdots + 10 + 1$.

   Demuestre que $d$ es primo.

   **Solución:**
   Note que $p = \underbrace{111111\ldots1}_{\text{d dígitos}}$ y si $d$ es compuesto es de la forma $d = qk$ con $q$, $k$ enteros positivos.

   Entonces

   $$p = \underbrace{111111\ldots1}_{\text{d dígitos}} = \underbrace{11\ldots1}_{\text{q}}\underbrace{11\ldots1}_{\text{q}}\cdots\underbrace{11\ldots1}_{\text{q}}$$

   Por otra parte note que

   $$\underbrace{11\ldots1}_{\text{q}} \times 1 = \underbrace{11\ldots1}_{\text{q}}$$

   $$\underbrace{11\ldots1}_{\text{q}} \times \underbrace{10\ldots0}_{\text{q}} = \underbrace{11\ldots1}_{\text{q}}\underbrace{00\ldots0}_{\text{q}}$$

   Por tanto

   $$\underbrace{11\ldots1}_{\text{q}} \times \underbrace{10\ldots0}_{\text{q}}1 = \underbrace{11\ldots1}_{\text{q}}\underbrace{11\ldots1}_{\text{q}}$$

   Finalmente

   $$\underbrace{11\ldots1}_{\text{q}} \times \underbrace{10\ldots0}_{\text{q}}\cdots\underbrace{10\ldots0}_{\text{q}}1 = \underbrace{11\ldots1}_{\text{q}}\underbrace{11\ldots1}_{\text{q}}\cdots\underbrace{11\ldots1}_{\text{q}} = p$$

   Lo cual contradice el hecho de que $p$ es primo. Por tanto $d$ es primo.

5. Sean $a$ y $b$ números pares, tales que $M = (a+b)^2 - ab$ es múltiplo de 5. Considere las afirmaciones siguientes:

   I) Los dígitos de las unidades de $a^3$ y $b^3$ son diferentes.

   II) $M$ es divisible por 100.

   Indique cuáles de las afirmaciones anteriores, con certeza, son verdaderas.

   **Solución:**

   Como $a$ y $b$ son pares entonces $M = (a+b)^2 - ab = a^2 + ab + b^2$ es par y por tanto divisible por 10.

   Como $10 \mid (a^2 + ab + b^2)$ entonces $10 \mid (a^3 - b^3)$, lo que significa que la resta $(a^3 - b^3)$ termina en 10, entonces $a^3$ y $b^3$ terminan en el mismo dígito. Así, la afirmación I es falsa.

   Como se aprecia en la siguiente tabla que contiene las unidades de $n$ y $n^3$.

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n^3$ | 0 | 1 | 8 | 7 | 4 | 5 | 6 | 3 | 2 | 9 |

   Si $a^3$ y $b^3$ terminan en el mismo dígito entonces $a$ y $b$ terminan en el mismo dígito.

   Por tanto $a^2$, $ab$ y $b^2$ tienen el mismo dígito en las unidades, entonces $M = a^2 + ab + b^2$ (que termina en 0) tiene el mismo dígito en las unidades que el número $3a^2$.

   Por lo anterior, $10 \mid 3a^2$, $10 \mid a^2$, $10 \mid a$ y, por lo tanto, $10 \mid b$.

   Finalmente esto significa que $100 \mid a^2$, $100 \mid ab$ y $100 \mid b^2$, con lo cual $100 \mid M$. Así, la afirmación II es verdadera.

## FUNCIONES

1. Considere $f(n,m)$ el número de secuencias finitas de 1's y 0's tal que cada secuencia empieza en 0, tiene exactamente $n$ 0's y $m$ 1's, y no hay tres 0's o tres 1's consecutivos.

   Demuestre que si $m,n>1$, entonces

$$f(n,m)=f(n-1,m-1)+f(n-1,m-2)+f(n-2,m-1)+f(n-2,m-2)$$

**Solución:**

Defina $g(n,m)$ el número de secuencias finitas de 1's y 0's tal que cada secuencia empieza en 1 y no hay tres 0's o tres 1's consecutivos y tiene exactamente $n$ 0's y $m$ 1's.

Nótese que $f(n,m)=g(m,n)$. Ahora, las secuencias citadas, que inician en 0, pueden tener un solo 0 al inicio, y luego un 1, o bien, dos ceros y luego un 1, por lo que se tiene

$$f(n,m)=g(m,n-1)+g(m,n-2)$$

Dado que se puede aplicar el mismo razonamiento a $g$, se tendría que

$$g(m,n-1)=f(n-1,m-1)+f(n-1,m-2)$$

$$g(m,n-2)=f(n-2,m-1)+f(n-2,m-2)$$

de donde se puede concluir lo solicitado.

2. ¿Existe una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que cumpla que para todo $n \in \mathbb{N}$, $10^{f(n)} < 10n + 1 < 10^{f(n)+1}$?

   **Solución:**

   Asuma que $n$ tiene $k$ dígitos, entonces $n = d_1 d_2 \dots d_k$, y por ende $10n + 1$ tiene $k + 1$ dígitos, $10n + 1 = d_1 d_2 \dots d_k 1$; es decir:
$$10^k < 10n + 1 < 10^{k+1}$$

   Basta con considerar $f(n)$ como el número de dígitos del número $n$ (puede responderse también que es la parte entera del logaritmo en base 10 de $n$).

3. Considere una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumple las siguientes dos propiedades: $f$ es periódica de periodo 5 (es decir, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x+5) = f(x)$), y al restringir $f$ al intervalo $[-2, 3[$, $f$ coincide con $x^2$. Determine el valor de $f\,(2018)$

   **Solución:**

   Por la segunda propiedad, se tiene que para todo $x \in [-2, 3[\,$, $f(x) = x^2$, en particular $f(-2) = 4$

   Por la primera propiedad, $f(-2) = f(3) = f(3+5k)$, por lo que

$$f(2018) = f(3+2015) = f(3+5\cdot 403) = f(3) = 4$$