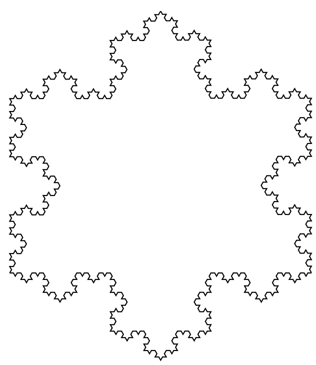
XXXI OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UNA - UCR - MICITT - UNED - TEC

SOLUCIÓN
PRIMERA ELIMINATORIA NACIONAL



Nivel II

($8^\circ - 9^\circ$)

2019

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2019 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, deseándole los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 20 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del viernes 5 de julio, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \approx \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

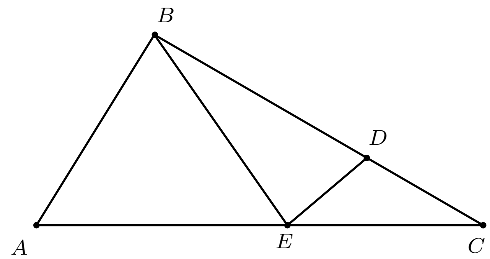
1. En la figura adjunta se muestra un triángulo ABC y puntos D y E en sus lados tales que $AB = BD = AE$ y $DE = DC$. Si se sabe que $m\angle BAE = 60°$, entonces la medida $\angle EDC$ es

   (a) 80°

   (b) 100°

   (c) 120°

   (d) 130°



- Opción correcta: $b)$

- **Solución:** Como $AB = AE$, los ángulos $\angle ABE$ y $\angle AEB$ tienen igual medida y como $\angle BAE = 60°$ entonces $m\angle ABE = m\angle AEB = 60°$ y entonces $BE = AB = AE = BD$

  Por otro lado $m\angle DEC = m\angle DCE = \alpha$ pues $DE = DC$. Por el teorema del ángulo externo, $m\angle BDE = 2\alpha$. Además $m\angle BDE = m\angle BED$ porque $BE = BD$. Como $m\angle AEB + m\angle BED + m\angle DEC = 180°$ se tiene $60° + 2\alpha + \alpha = 180°$, por lo que $\alpha = 40°$. Finalmente $m\angle EDC = 100°$

2. La expresión $\dfrac{2^{2021} + 2^{2019}}{2^{2021} - 2^{2019}}$ es equivalente a

   (a) $\dfrac{5}{3}$

   (b) $\dfrac{3}{5}$

   (c) $\dfrac{2021}{2019}$

   (d) $\dfrac{2019}{2021}$

- Opción correcta: (a)

- **Solución:** Al trabajar la expresión, se tiene:

$$\frac{2^{2021} + 2^{2019}}{2^{2021} - 2^{2019}} = \frac{2^{2019}(2^2 + 1)}{2^{2019}(2^2 - 1)} = \frac{2^2 + 1}{2^2 - 1} = \frac{5}{3}$$

3. Un conductor realiza un viaje de 36 horas, durante el recorrido observa que $\dfrac{1}{5}$ del tiempo que ha empleado hasta el momento equivale a $\dfrac{3}{5}$ de lo que le falta. Si hace todo el viaje a velocidad constante, la cantidad de horas que ha empleado hasta ese momento corresponde a

(a) 27

(b) 24

(c) 16

(d) 9

- Opción correcta: (a)

- **Solución:** $\dfrac{1}{5}$ del tiempo recorrido equivale a $\dfrac{3}{5}$ del tiempo que le falta, por lo que el tiempo recorrido es el triple del tiempo que le falta.
  Como el tiempo recorrido y el que le falta suman 36 horas, entonces 36 equivalen a 4 veces el que le falta, por lo que este tiempo es de 9 horas. Por tanto el tiempo recorridos es de $36-9=27$ horas.

4. Un cubo de $3\times3\times3$ ha sido pintado de turqueza en cada una de sus caras. El cubo se corta en minicubos de $1\times1\times1$ y cada uno de estos minicubos son depositados en una urna. Si se extrae de manera aleatoria un minicubo de la urna, la probabilidad de que este minicubo posea exactamente dos caras pintadas es

(a) $\dfrac{6}{27}$

(b) $\dfrac{8}{27}$

(c) $\dfrac{12}{27}$

(d) $\dfrac{20}{27}$

- Opción correcta: (c)

- **Solución:** Al cortar el cubo en minicubos 1×1 se obtienen 27 minicubos en total.

  Ocho de estos poseen tres caras pintadas (los de los vértices), por lo que en cada una de las 12 aristas queda un cubo con solo dos caras pintadas (el del centro de cada arista pues los otros dos de cada una es esquinero).

  Además, hay seis cubos con una sola cara pintada (los centrales de cada cara) y uno de los 27 cubos no está pintado en cara alguna (el único cubo central no visible antes de realizar el corte al cubo original).

  Como el caso favorable en nuestro problema son los minicubos con dos caras pintadas, se tiene que la probalidad solicitada es $\dfrac{12}{27}$.

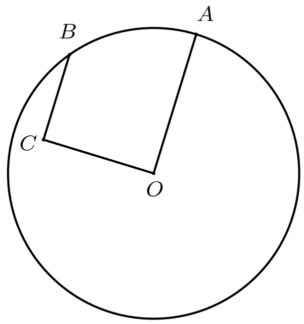
5. Considere la figura adjunta donde O es el centro de la circunferencia, $OA=4\sqrt{10}$ cm, $OC=4$ cm. y $\overline{OC}\perp\overline{OA}$. Si $\overline{BC}\parallel\overline{OA}$, entonces BC es

(a) $2\sqrt{10}$

(b) $4\sqrt{11}$

(c) 3

(d) 12



- Opción correcta: (d)
- **Solución:** Al trazar el radio $\overline{OB}$ y considerar el $\triangle BCO$, que es triángulo rectágulo, se cumple que $OB^2 = BC^2 + CO^2$ por el Teorema de Pitágoras.

  Luego, $\left(4\sqrt{10}\right)^2 = x^2 + 4^2 \Rightarrow x^2 = 16 \cdot 10 - 16 = 16 \cdot 9 \Rightarrow x = 4 \cdot 3 = 12$.

6. En una caja no transparente se tiene 100 bolitas azules, 120 bolitas negras, 150 bolitas amarillas, 85 bolitas blancas y 250 bolitas anaranjadas. El menor número de bolitas que se debe extraer al azar para tener, con certeza, al menos 50 bolitas del mismo color es

   (a) 50

   (b) 51

   (c) 245

   (d) 246

- Opción correcta: (d)
- **Solución:** Para obtener al menos 50 bolitas, con certeza, del mismo color, se debe extraer 49 bolitas de cada color, esto es 245 bolitas, y ahora se procede a extraer otra bolita, sin importar el color que resulte ésta bolita será, con certeza, la 50 de un mismo color.

7. En un triángulo isósceles $\triangle ABC$ se tiene que $m\angle B = 100°$, P es el punto medio de $\overline{BC}$ y D es un punto en $\overline{AC}$ tal que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{PD}$. La $m\angle PDB$ corresponde a

   (a) 20

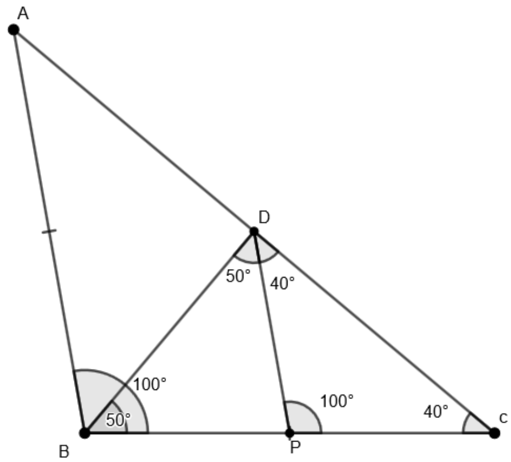
   (b) 45

   (c) 50

   (d) 60

- Opción correcta: (c)

- **Solución:**



$m\angle BAC = m\angle BCA = 40°$; por Suma de ángulos internos en un triángulo y ser isósceles.
$m\angle CPB = 100°$ y $m\angle CDP = 40°$; por ser correspondientes entre paralelas.
$\triangle CDP$ es isósceles y como P es punto medio, entonces $BP = PD = PC$, luego $\triangle BPD$ es isósceles también.
$\Rightarrow m\angle PBD = m\angle PDB$; además $m\angle PBD + m\angle PDB = 100°$ por teorema del ángulo externo.
$\Rightarrow m\angle PDB = 50°$

Leonel Chaves. Original. Álgebra, potencias y raíces. I Eliminatoria, III Nivel. Medio

8. El número $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$ es equivalente a

   (a) $\sqrt[16]{2}$

   (b) 2^5

   (c) $2^{\frac{7}{16}}$

   (d) $2^{\frac{15}{16}}$

- Opción correcta: $d)$

- Solución:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}} &= \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdot 2^{1/2}}}} \\
&= \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2^{3/2}}}} \\
&= \sqrt{2\sqrt{2\cdot 2^{3/4}}} \\
&= \sqrt{2\sqrt{2^{7/4}}} \\
&= \sqrt{2\cdot 2^{7/8}} \\
&= \sqrt{2^{15/8}} \\
&= 2^{15/16}
\end{aligned}
$$

9. Si $a^2+ab+b^2=2$ y $a+b=1$ entonces el valor de ab es
   - (a) -1
   - (b) 0
   - (c) 1
   - (d) 2

- Opción correcta: a)
- **Solución:**

$$
\begin{aligned}
a+b=1 &\Rightarrow (a+b)^2=1 \\
&\Rightarrow a^2+2ab+b^2=1 \\
&\Rightarrow a^2+ab+b^2+ab=1 \\
&\Rightarrow 2+ab=1 \\
&\Rightarrow ab=-1
\end{aligned}
$$

10. Se mezclan 12 litros de agua con 18 litros de alcohol, se extraen de esta mezcla 5 litros y se reemplazan por agua. Luego, se extraen 10 litros de la nueva mezcla y también se reemplazan por agua. La cantidad de alcohol que finalmente queda en el recipiente es
    - (a) 8
    - (b) 9
    - (c) 10
    - (d) 12

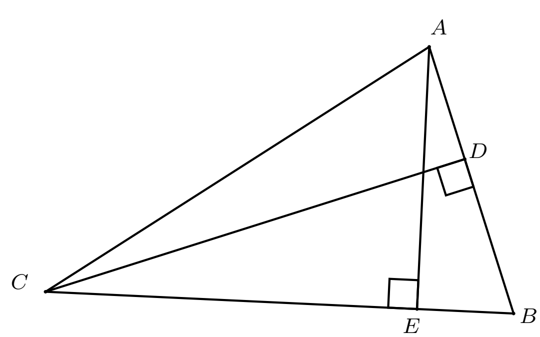
- Opción correcta: (c)
- **Solución:** La mezcla inicial contiene $\dfrac{12}{12+18} = \dfrac{2}{5}$ de agua y $\dfrac{3}{5}$ de alcohol.
  En la primera extracción de mezcla se sacan 5 L de los cuales $\dfrac{2}{5}$ son de agual y el resto de alcohol, es decir 2 L de agua y 3 L de alchol.
  Con la ingreso de los nuevos 5 L de agua la mezcla tiene 15 L de agua y 15 de alchol, es decir 50 % de cada uno.

  En la segunda extracción de mezcla se sacan 10 L de los cuales $\dfrac{1}{2}$ son de agua y el resto de alcohol, es decir, 5 L de agua y 5 L de alchol, por lo que quedan 10 L de agua y 10L de alcohol. Como el último remplazo es de agua eso no afecta la cantidad de alcohol que son 10 L.

11. En un partido de baloncesto se puede obtener 3 puntos, 2 puntos o 1 punto al encestar el balón, dependiendo de la zona de donde se lance el balón. Si un equipo anotó 108 puntos en un partido, en el cual acertaron 40 lanzamientos, la mayor cantidad de lanzamientos de 1 punto que pudieron hacer es
    (a) 2
    (b) 4
    (c) 6
    (d) 8

- Opción correcta: c
- **Solución:** Sean x, y, z la cantidad de lanzamientos de 3 pts, 2 pts y 1 pt repectivamente.
  Se tiene que (1) $40 = x + y + z$ y (2) $108 = 3x + 2y + z$. Al multplicar la ecuación (1) por 3 y restarse de la ecuación (2) se tiene que $12 = y + 2z$. Luego, $z \leq 6$, ya que si $z \geq 7$ no se cumplirá la igualdad. Por lo tanto, la mayor cantidad de lazamientos de 1 pt es 6.

12. Considere el $\triangle ABC$ de la figura adjunta en la que $A - D - B$ y $C - E - B$. Si se tiene que $AE = \dfrac{64}{5}$, $AB = 20$ y $CB = 25$, entonces CD es
    (a) 8
    (b) 16
    (c) 20
    (d) 32



- Opción correcta: (b)

- **Solución:** De acuerdo con los datos del enunciado, $\overline{AE}$ es altura del $\triangle ABC$ sobre $\overline{BC}$. También se tiene que $\overline{CD}$ es altura del $\triangle ABC$ sobre $\overline{AB}$. Luego

  $(ABC) = \dfrac{BC \cdot AE}{2} = \dfrac{25 \cdot \frac{64}{5}}{2} = 160.$

  $(ABC) = 160 = \dfrac{AB \cdot CD}{2} = \dfrac{20 \cdot CD}{2} = 10CD \Rightarrow CD = \dfrac{160}{10} = 16.$

13. Un hombre empieza a correr a las 12 m.d. hacia el norte, a un paso de 4 minutos por kilómetro. Después invierte su dirección y empieza a correr hacia el sur a un paso de 7 minutos por kilómetro. Si regresa al punto de partida a las 12: 47 p.m. la cantidad de kilómetros es aproximadamente

    (a) 4.27

    (b) 8.55

    (c) 17.09

    (d) 29.90

- Opción correcta: (b)

- **Solución:** Considere t el tiempo en la dirección norte, $47-t$ el tiempo en minutos que lo hace en la dirección sur. Como llega al mismo lugar, la ecuación que se debe resolver es: $\dfrac{t}{4} = \dfrac{47-t}{7}$, al resolverla se obtiene que $t = \dfrac{188}{11} \approx 17{,}09$ minutos. Por lo anterior, el hombre recorrrió en total aproximadamente 8.55 km.

14. La cifra de las unidades del número $2019^{2020}+2020^{2019}$ corresponde a

    (a) 0

    (b) 1

    (c) 2

    (d) 3

- Opción correcta: (b)

- **Solución:** Para calcular el último dígito basta multiplicar los últimos dígitos. Observe que $9^2 = 81$, es decir, el último dígito de las potencias pares de 2019 es 1. Por otro lado, es claro que el último dígito de 2020^{2019} es 0. Luego, el último dígito de $2019^{2020}+2020^{2019}$ es $0+1=1$.

15. Las casillas de una cuadrícula de 2019×2019 se colorean con cuatro colores amarillo (A), rojo (R), verde (V) y café (C), siguiendo el patrón indicado en la figura. ¿Qué color se usó más que los otros tres?

(a) Verde

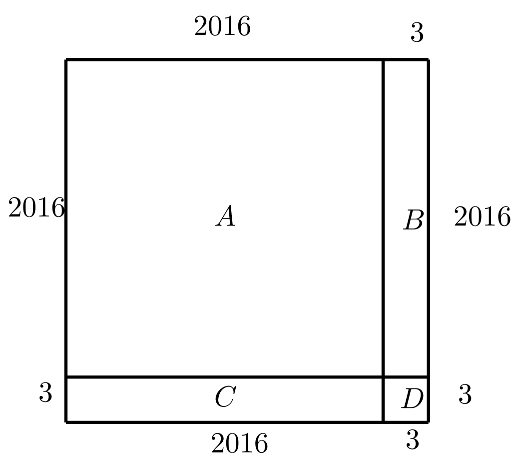
(b) Rojo

(c) Café

(d) Amarillo

A	R	V	C	A	R		$\cdots$	
R	V	C	A	R	V		$\cdots$	
V	C	A	R	V			$\cdots$	
C	A	R	V				$\cdots$	
A	R	V					$\cdots$	
R	V						$\cdots$	
							$\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
							$\cdots$	

- Opción correcta: (a)
- **Solución:** Se procede a dividir en cuatro rectángulos A, B, C y D respectivamente: uno de 2016×2016, otro de 3×2016, otro de 2016×3 y el otro de 3×3, como se indica en la siguiente figura:



A	R	V
R	V	C
V	C	A

En las regiones A, B y C algún lado es múltiplo de 4, así que aparecen todos los colores igualmente. El cuadrado D, se puede apreciar, que el color que más aparece es el verde.

16. Para ser admitido en la universidad Carlos realiza un examen de 80 ejercicios de selección única. En dicho examen si un estudiante resuelve un ejercicio correctamente recibe 7 puntos, si desconoce la respuesta puede marcar la opción de *no responde* y se le asigna 1 punto, pero si contesta erróneamente se le restan 4 puntos. Si Carlos falló 7 ejercicios más de los que marcó *no responde* y obtuvo un puntaje 347, la cantidad de preguntas que contestó erróneamente corresponde a

(a) 13

(b) 14

(c) 15

(d) 16

- Opción correcta: (c)
- **Solución:** Sea x el número de preguntas que Carlos contestó correctamente, y el número de preguntas que marcó "no responde". Por tanto el número de pregutas que Carlos fallo es $y+7$.

  Como el examen es de 80 ejercicios entonces

  $$x+y+y+7=80$$

  y como Carlos obtuvo 347 puntos se tiene que

  $$7x+y-4(y+7)=347$$

  El sistema de ecuaciones se reduce a:

  $$x+2y=73$$
  $$7x-3y=375$$

  donde $x=57$ y $y=8$ por lo tanto fallo $8+7=15$ preguntas.

17. En un $\triangle ABC$, D es el punto medio de $\overline{AC}$, E un punto tal que $C-E-B$ y $CE=2EB$. Si $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$ se intersecan en F y el área del $\triangle AFB$ es 1, el área del $\triangle ABC$ es

(a) 3

(b) $\dfrac{10}{3}$

(c) $\dfrac{11}{3}$

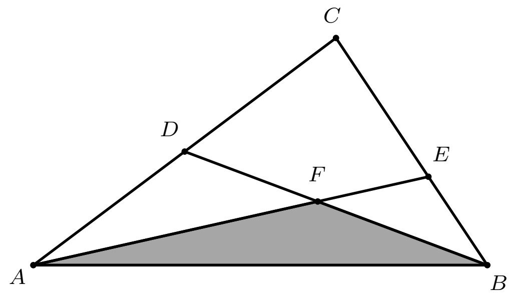
(d) 4

- Opción correcta: (d)
- **Solución:** Se construye un segmento que una C y F. Se sabe que $(ADF)=(DCF)=x$ y si $(BFE)=z$, entonces $(FCE)=2z$.

  Además, se tiene que, $(ADB)=(DCB) \quad \Rightarrow x+1=x+3z \quad \Rightarrow z=\dfrac{1}{3}$.

  Ahora, $2\cdot(AEB)=(DCB) \quad \Rightarrow 2+2z=2x+2z \quad \Rightarrow x=1$

  Por lo tanto, $(ABC)=1+2x+3z=4$.



18. El mayor cubo perfecto divisor de $67^4 - 2 \cdot 67^2 + 1$ es
    (a) 125

    (b) 64

    (c) 27

    (d) 8

- Opción correcta: (b)
- **Solución:** Descomponemos el número $67^4 - 2 \cdot 67^2 + 1$ en factores primos: $67^4 - 2 \cdot 67^2 + 1 = (67^2 - 1)^2 = [(67-1)(67+1)]^2 = (66)^2(68)^2 = 11^2 \cdot 3^2 \cdot 17^2 \cdot 2^6$, luego el mayor cubo perfecto divisor es $2^6 = (2^2)^3 = 64$

19. Se construye un triángulo como se muestra en la figura, donde la primera fila inicia con 1, la segunda con 2 y así susecivamente hasta llegar a la fila 2019. Los demás números se construyen sumando el número que está a su izquierda (en la misma fila) con el de la izquierda de la fila anterior.

1							
2	3						
3	5	8					
4	7	12	20				
5	9	16	28	48			
6	11	20	36	64	112		
$\vdots$							
2019	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$ k

Según los datos se puede deducir que el número k es multiplo de
    (a) 2017

    (b) 2018

    (c) 2019

    (d) 2020

- Opción correcta: (d)

- **Solución:** La estrategia de solución consiste en buscar un patrón en el último número de cada fila:
  La fila 2 termina en $3 = 2^0 \cdot 3$.
  La fila 3 termina en $8 = 2^1 \cdot 4$.
  La fila 4 termina en $20 = 2^2 \cdot 5$.
  La fila 5 termina en $48 = 2^3 \cdot 6$.
  La fila 6 termina en $112 = 2^4 \cdot 7$.
  De lo anterior se deduce que :
  La fila n termina en $2^{n-2} \cdot (n+1)$.
  Por tanto la fila 2019 termina en $k = 2^{2017} \cdot (2020)$. Con lo que k es múltiplo de 2020.

20. La cantidad de divisores positivos que tiene el número 1000^{2019} es

    (a) 2022^2

    (b) 2023^2

    (c) 6057^2

    (d) 6058^2

- Opción correcta: d

- **Solución:** Al realizar la descomposición prima se obtiene que $1000^{2019} = (2^3 \cdot 5^3)^{2019} = 2^{6057} \cdot 5^{6057}$. Luego la cantidad de divisores está dada por $(6057+1)(6057+1) = 6058^2$