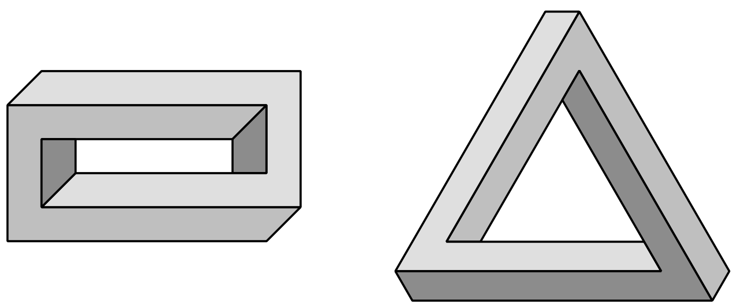
XXXI OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UNA - UCR - MICITT - UNED - TEC

SOLUCIÓN
PRIMERA ELIMINATORIA NACIONAL



Nivel I
(7°)

2019

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2019 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, deseándole los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 20 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del viernes 5 de julio, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \approx \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

1. Carolina y Alejandro hacen fila para comprar palomitas e ingresar al estreno de su película favorita en el Cine. En determinado momento, Carolina observa que delante de ella hay siete personas y Alejandro sabe que hay 20 personas en total haciendo fila. Si Alejandro está justo delante de Carolina en la fila, la cantidad de personas haciendo fila que están entre Alejandro y el último de la fila es

   (a) 10

   (b) 11

   (c) 12

   (d) 13

- Opción correcta: (c)

- **Solución:** Carolina está detrás de Alejandro, por lo que, contando a Carolina, después de Alejandro hay 13 personas. Así, entre Alejandro y el último hay 12 personas.

2. Los cuatro clasificados a la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe se han comido 11 manzanas en total. Cada uno de ellos se ha comido, al menos, una manzana y ninguno ha comido la misma cantidad de manzanas que otro de ellos. Tres de ellos han comido nueve manzanas en total y uno de estos se ha comido exactamente tres manzanas. La cantidad de manzanas comidas por el Olímpico que más manzanas comió es

   (a) 4

   (b) 5

   (c) 6

   (d) 7

- Opción correcta: (b)

- **Solución:** Al mencionar que tres de ellos han comido nueve en total, se deduce que el otro comió dos. De estos tres que comieron nueve en total, uno comió tres, así que los otros dos comieron seis. De esas seis manzanas para los dos Olímpicos restantes, solo se puede deducir que uno comió cinco y el otro una (no es posible 6+0, ni 4+2 ni 3+3).

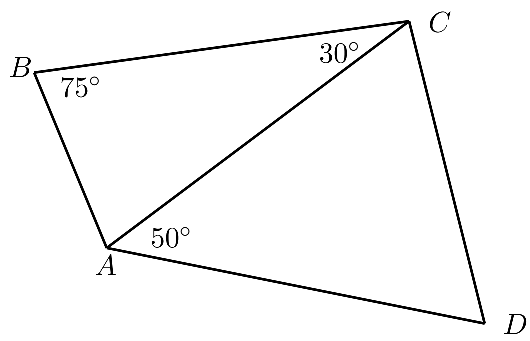
3. En la figura adjunta se tiene el cuadrilátero $ABCD$. Si $BC = AD$, entonces $m\angle ADC$ corresponde a

(a) 55°

(b) 65°

(c) 70°

(d) 75°



- Opción correcta: (b)
- **Solución:** Se tiene $m\angle BAC = 180° - m\angle ABC - m\angle ACB = 180° - 75° - 30° = 75°$. Por lo anterior, se tiene que $AC = BC = AD$. Entonces $\triangle ACD$ es isósceles, se concluye que $m\angle ACD = m\angle ADC$. Por lo tanto, $2m\angle ADC = 180° - 50° \Rightarrow m\angle ADC = \dfrac{130°}{2} = 65°$

4. Melvin miente los días jueves, viernes y sábado y dice la verdad el resto de los días. Pedro miente los lunes, martes y miércoles, y dice la verdad el resto de los días. Si ambos dicen *"mañana es un día en el cual yo miento"*, entonces el día de la semana que será mañana es

   (a) lunes

   (b) martes

   (c) miércoles

   (d) jueves

- Opción correcta: (d)
- **Solución:** Determinemos cómo respondería cada uno a la pregunta ¿miente usted mañana?

  Lunes: Melvin no, Pedro no
  Martes: Melvin no, Pedro no
  Miércoles: Melvin sí, Pedro sí

  Por lo tanto ambos podrían decir el miércoles mañana es un día en el cual yo miento, así mañana será jueves.

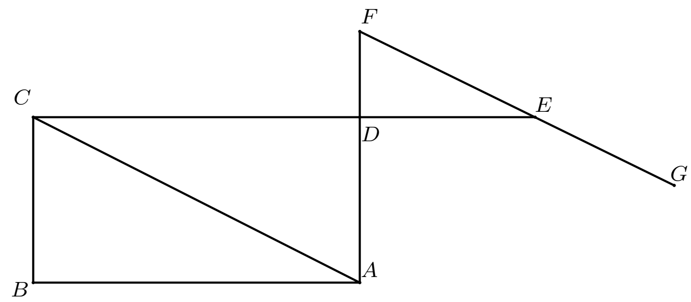
5. Considere la figura adjunta en la que $\square ABCD$ es un rectángulo, $C - D - E$, $A - D - F$, $F - E - G$ y $\overline{FG} \parallel \overline{AC}$. Si $m\angle ACE = 33°$, entonces $m\angle DEG$ es

(a) 33°

(b) 57°

(c) 123°

(d) 147°



- Opción correcta: (d)

- **Solución:** Los ángulos $\angle ACE$ y $\angle FEC$ son alternos internos entre parelas, por lo que miden lo mismo.

  Luego, $m\angle FED = 33° \Rightarrow m\angle DEG = 180° - 33° = 147°$.

6. Cuatro cajas tienen bolas amarillas y blancas, todas las bolas poseen el mismo peso, diámetro y textura. En las opciones se muestran las cantidades respectivas de bolas que hay en cada una de las cuatro cajas. Fabián debe seleccionar una de las cajas para extraer de ella una bola de manera aleatoria. Si desea la mayor probabilidad de que la bola extraída sea amarilla, la caja que debe seleccionar Fabián es la que posee

   (a) 7 bolas amarillas y 4 bolas blancas

   (b) 8 bolas amarillas y 6 bolas blancas

   (c) 9 bolas amarillas y 7 bolas blancas

   (d) 11 bolas amarillas y 9 bolas blancas

- Opción correcta: (a)

- **Solución:** Las probabilidades en cada una de las opciones de obtener una bola amarilla son:

  Opción (a): $\dfrac{7}{11} \approx 0{,}64$

  Opción (b): $\dfrac{8}{14} \approx 0{,}57$

  Opción (c): $\dfrac{9}{16} = 0{,}5625$

  Opción (d): $\dfrac{11}{20} \approx 0{,}55$

  Por lo anterior, la caja que tiene mayor probabilidad de que la pelota que saque sea amarilla, es la opción (a).

7. En la figura adjunta se muestran cuatro tarjetas distintas en uno de sus lados. Cada una de las tarjetas tiene una letra en uno de sus lados y un número del otro lado. Aria dice que para todas las tarjetas se cumple que si por un lado hay una vocal, entonces por el otro lado hay un número par. Sansa no confía en Aria y desea comprobar si Aria tiene razón o no. Sin voltear tarjetas innecesarias para decidir si Aria tiene razón, Sansa debe voltear solo las tarjetas

   (a) I y II

   (b) I y III

   (c) I y IV

   (d) II y IV

- Opción correcta: (a)
- **Solución:** La tarjeta que contiene la letra A hay que voltearla, pues si tiene un número impar del otro lado entonces lo que dijo Aria sería falso.
  La tarjeta que contiene el número 7 hay que voltearla, pues si tiene una vocal del otro lado sería un caso que también es falsa la afirmación de Aria.
  La tarjeta que contiene la letra K no hay que voltearla, pues la afirmación no especifica que debe pasar cuando haya una consonante.
  La tarjeta que contiene el número 2 no hay que voltearla, pues la afirmación no excluye la posibilidad de que al otro lado de una consonante haya un número par.

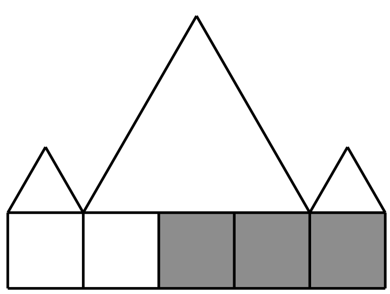
8. La figura adjunta está construida usando cinco cuadrados congruentes como base y tres triángulos equiláteros. Si el perímetro de la figura es 170 cm, entonces el área de la región sombreada, en cm^2, es

   (a) 30

   (b) 75

   (c) 300

   (d) 375



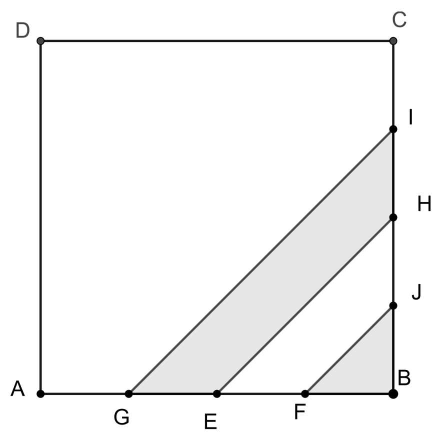
- Opción correcta: (c)
- **Solución:** Se puede observar que el perímetro se conforma por 7 lados de los cuadrados, 4 de los lados de los triángulos equiláteros pequeños (que son congruentes con los lados de los cuadrados) y 2 lados del triángulo grande (que miden 3 veces el lado del cuadrado). Esto quiere decir que el perímetro está dado por 17 veces la medida del lado del cuadrado (llamemos x a la medida de ese lado), es decir, $17x = 170 \Rightarrow x = 10$cm.
  Ahora se determina el área de la región sombreada que corresponde a tres cuadrados de lado

$x = 10\text{cm}$, por lo que se tiene que dicha área sería $3 \cdot 10^2 = 300\text{cm}^2$

9. Olcoman, tiene un cupón del 30 % de descuento sobre el total a pagar de su compra en la tienda deportiva. Decidió ir a comprar unas tenis para fútbol sala. Al llegar a la tienda encontró con que las tenis contaban con un 40 % de descuento. El descuento total que obtendría el Olcoman si utiliza el cupón corresponde a
   (a) 50 %
   (b) 58 %
   (c) 60 %
   (d) 70 %

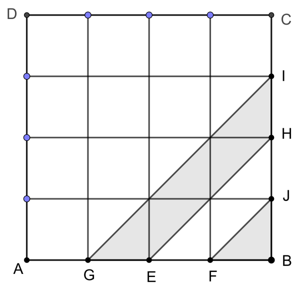
- Opción correcta: (b)
- **Solución:** Sea x el precio de las tenis. Al aplicarle 40 % de descuento, el nuevo precio de las tenis será $\frac{60x}{100}$. Luego a este nuevo precio se le aplica 30 % de descuento $\frac{60x}{100} \cdot \frac{30}{100} = \frac{9x}{50}$, donde $\frac{9x}{50}$ representa 18 % de descuento. Así el descuento total es $40\,\% + 18\,\% = 58\,\%$

10. El cuadrado de la figura adjunta es de 40 cm^2 de área. Los puntos sobre los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$ se distribuyen de forma tal que $AG = GE = EF = EB = BJ = JH = HI = IC$. El área, en cm^2, de la región sombreada es



   (a) $\frac{15}{2}$
   (b) $\frac{25}{4}$
   (c) $\frac{24}{5}$
   (d) 10

- Opción correcta: (a)
- **Solución:**



El lado del cuadrado es $2\sqrt{10}$ por lo $AG = GE = EF = EB = BJ = JH = HI = IC = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

El área del triángulo $\triangle FBJ = \dfrac{5}{4}$

Con el trazo de rectas paralelas a los lados del cuadrado en los puntos que delimitan las áreas sombreadas, se puede notar que el área sombreada equivale a $6 \triangle FBJ = \dfrac{15}{2}$

11. Si se escoge un número al azar del conjunto $\{100, 101, 102, \ldots, 998, 999\}$, la probabilidad de que el número seleccionado tenga todos sus digitos diferentes es

    (a) $\dfrac{14}{25}$

    (b) $\dfrac{2}{75}$

    (c) $\dfrac{63}{125}$

    (d) $\dfrac{3}{125}$

- Opción correcta: (a)
- **Solución:** Sea abc el número escogido. El digito a tiene 9 posibilidades de ser escogido, el b 8 posibilidades y el c 7 posibilidades. De esta forma se tienen $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ números que tienen todos sus digitos diferentes. Luego la probabilidad de ser escogido es $\dfrac{504}{900} = \dfrac{14}{25}$

12. Varios miembros de la familia González estaban reunidos en una fiesta y se dieron cuenta que la suma de sus edades era exactamente 300. Además, notaron que la última vez que se habían reunido, hace algunos años, sus edades sumaban 278; y que si se volvían a reunir para celebrar los 60 años del abuelo dentro de algunos años, sus edades sumarían 333. La cantidad de personas que estaban reunidas en la fiesta es

(a) 11

(b) 15

(c) 22

(d) 33

- Opción correcta: (a)
- **Solución:** Cada año que pasa, la suma total de las edades aumenta un número igual a la cantidad de personas que estaban reunidas. Como dentro de algunos años la suma habrá aumentado 33 años, el número de personas debe ser divisor de 33. Como anteriormente la suma era 22 años menos, también debe ser divisor de 22. Los únicos divisores comunes de 22 y 33 son 1 y 11, por lo que la respuesta correcta es 11.

13. Carlos compró un libro con 10 % de descuento. Después de leerlo decide venderlo a María con 20 % de descuento del precio que él pagó. Si Carlos perdió en el negocio 450 colones, la cantidad de colones que se ahorró María con respecto al precio original es

(a) 750

(b) 700

(c) 500

(d) 450

- Opción correcta: (b)
- **Solución:** Como Carlos compra el libro con un descuento de 10 % quiere decir que paga 90 % del precio original, luego hace un descuento a Maria de 20 % con lo cual Carlos pierde $90\,\% \times 0{,}20 = 18\,\%$ del precio orignal que corresponde a 450 colones. Si x es el precio original entonces $0,18x = 450$, por tanto $x = 2500$ colones. Luego Carlos compra el libro en 2250 colones y lo vende a María en 1800 colones, ella se ahorra 700 colones.

14. En un grupo de 11 cajas grandes, algunas contienen 8 cajas medianas cada una; algunas de las cajas medianas contienen también 8 cajas pequeñas cada una. Si hay 116 cajas que no contienen ninguna otra (contando también las cajas pequeñas), la cantidad de cajas que hay en total corresponde a

(a) 116

(b) 131

(c) 135

(d) 140

- Opción correcta: (b)
- **Solución:** Supongamos que las cajas están todas vacías y que vamos metiéndolas en orden. Al principio tenemos 11 cajas vacías. Si decidiéramos llenar algunas de estas cajas tendríamos una caja vacía menos, pero habría 8 cajas vacías más (las que se van a meter en esa caja grande); entoncess al final de esa operación tendríamos una caja llena y siete cajas vacías más. Con las cajas medianas pasa lo mismo: por cada caja llena se agrengan 7 vacías. El número de cajas vacías debe ser $11 + 7k$ donde k es el número de cajas que se llenaron. Como $116 = 11 + 7 \cdot 15$, se tienen 15 cajas llenas, así que en total hay $116 + 15 = 131$ cajas.

15. Un tren de pasajeros tiene mil vagones. Leo, Eric y Alex trabajan recogiendo tiquetes del tren; Leo recoge los tiquetes de los vagones múltiplos de 15 y Alex recoge los tiquetes de los vagones múltiplos de 6. Si los tres coinciden dos veces, la segunda vez en el vagón 780, Alex y Erick coinciden en el vagón

    (a) 208

    (b) 510

    (c) 312

    (d) 728

- Opción correcta: (c)
- **Solución:** Leo, Erick y Alex deben coincidir por primera vez en el vagón 390; es decir, 390 es el mínimo común múltiplo de los vagones en los cuales recogen tiquetes. Como $390 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$, entonces Erick recoge tiquetes en los vagones múltiplos de 13, es decir, Alex y Erick coinciden en los vagones que son divisibles por 13 y por 6, cada 78 vagones. De las opciones, el que cumple esto es el vagón 312.

16. Considere un triángulo rectángulo $\triangle ABC$, de área 35 cm^2, recto en A. Si $AC = 7$cm. y D, E son puntos tales que $A - D - E - B$, $AD = EB$, $5AD = AB$, entonces el área del $\triangle DEC$, en cm^2, es

    (a) 7

    (b) 21

    (c) $\dfrac{21}{2}$

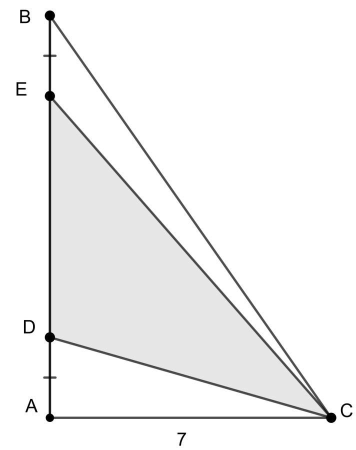
    (d) $\dfrac{35}{3}$

- Opción correcta: (b)
- **Solución:** Considerando la figura adjunta

Como $AC = 7$cm y el área del trángulo es 35 cm^2 se tiene que $AB = 10$.

Como $5AD = AB = 10$ se tiene que $AD = 2$ y así $ED = 6$

Finalmente $(DEC) = \dfrac{DE \cdot AC}{2} = 21$



17. Si en un mes hubo 5 lunes y 5 martes, pero solamente 4 domingos y 4 miércoles, entonces el día 30 del mes siguiente corresponde a

    (a) lunes

    (b) martes

    (c) miércoles

    (d) jueves

- Opción correcta: (d)
- **Solución:** Como el mes tiene 5 lunes y 5 martes, note que desde el primer lunes al último martes trancurren 30 días. Si dicho mes tiene 31 días, entonces tendrá que iniciar domingo o terminar miércoles, pero en ese caso tendrá 5 domingos o 5 miércoles lo cual contradice el enunciado. Por lo tanto debe tener 30 días, lo que significa que el próximo mes inicia un miércoles, y dentro de 4 semanas ($7 \times 4 = 28$ días) corresponde otra vez miércoles. En conclusión el día 30 corresponde a un jueves.

18. Se quiere formar un cubo con ladrillos. Si las dimensiones de cada ladrillo son 6 cm. 20 cm. y 15 cm. respectivamente, entonces la cantidad de ladrillos que se necesitan para formar el cubo más pequeño posible es

    (a) 60

    (b) 120

    (c) 180

    (d) 216

- Opción correcta: (b)
- **Solución:** Para saber el lado del menor cubo que se puede formar se obtiene el mínimo común múltiplo de 6, 15 y 20, que es 60.
  Se puede formar una base de 60 cm.$\times$60 cm. con 12 ladrillos. Para completar 60 cm. con el lado que mide 20 cm. se requieren 3 ladrillos y para completar 60cm. con el lado que mide 15 cm. se requieren 4 ladrillos.
  Luego se requieren 10 ladrillos, de 6 cm. de alto cada uno, para llegar a la altura de 60 cm.
  En total se necesitan $6 \cdot 3 \cdot 4 = 120$ ladrillos

19. La cantidad de números de tres dígitos abc (con $a \neq 0$)
    tales que $a + 3b + c$ es múltiplo de 3, correspode a

    (a) 100

    (b) 300

    (c) 330

    (d) 400

- Opción correcta: (b)
- **Solución:** Se puede observar que $3b$ siempre es un múltiplo de tres, entonces $a + c$ debe ser un múltiplo de tres. Por el criterio de divisibilidad de tres se deduce que el número de dos dígitos ac debe ser también un múltiplo de tres. Como hay 90 números de dos dígitos, y la tercera parte son múltiplos de tres, se tienen 30 números. Por otro lado, hay 10 posibilidades para elegir el dígito de b, en total se tienen $10 \cdot 30 = 300$ números que cumplen la condición.

20. Considere dos números naturales m y n tales que su mínimo común múltiplo es 4900 y su máximo común divisor es 14. Con certeza **NO** se cumple que

    (a) 2 divide a $(m + n)$

    (b) 4 divide a $(m + n)$

    (c) 5 divide a $(m + n)$

    (d) 7 divide a $m + n$

- Opción correcta: (c)
- **Solución:** Note que $14 = 2 \cdot 7$ y $4900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$, por lo que uno de los números es múltiplo de 5^2 (es decir, de 5) y el otro no. Entonces $m + n$ no puede ser múltiplo de 5.